CHAPITRE III

III APPLICATIONS DES EQUATIONS GENERALES A L'ETUDE D'ECOULEMENTS DE FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Pour résoudre les problèmes posés, nous avons à notre disposition 5 relations :

- équation de continuité : traduit la conservation de la masse
- équations d'EULER : équations dynamiques
- équation d'Etat du fluide
- théorème des quantités de mouvement ou théorème d'EULER
- théorème de BERNOULLI.

Ces relations ne pourront être appliquées à des phénomènes physiques que si les hypothèses relatives à ces relations sont respectées. Il est par conséquent nécessaire d'avoir une certaine connaissance des phénomènes, connaissance qu'on peut acquérir par l'expérience. La qualité d'une théorie pourra être testée par l'expérience.

III-I Applications du théorème de BERNOULLI :

III-I I) Pressioن statique, dynamique et totale :

Reprenons l'équation de BERNOULLI :

$$p + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2} = Cte$$

$p^* = p + \rho g z$ est appelée pression statique : c'est la pression à l'intérieur du fluide.

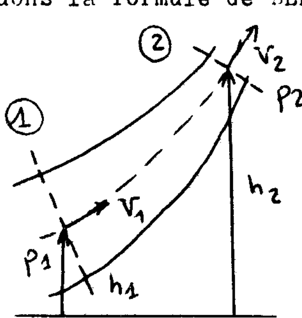
$p_a = \rho \frac{V^2}{2}$ est appelée pression dynamique : c'est l'énergie cinétique par unité de volume.

$p_t = p^* + \rho \frac{V^2}{2}$ est la pression totale

Remarque : On confond souvent p et $p+\rho gz$, les forces de pesanteur étant souvent négligeables par rapport aux forces de pression.

Tube piézomètrique :

Considérons une conduite assimilable à un tube de courant. Appliquons la formule de BERNOULLI.



$$p + \rho g h + \rho \frac{V^2}{2} = Cte = p_t$$

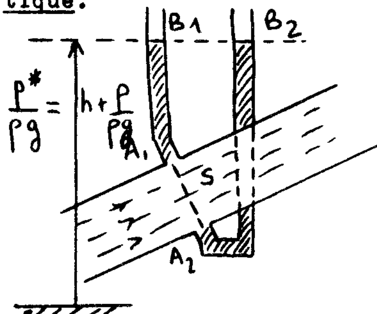
Entre 2 sections, on a donc :

$$p_I + \rho g h_I + \rho \frac{V_I^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{V_2^2}{2}$$

Si la conduite est cylindrique ou prismatique, la vitesse est parallèle aux génératrices et les lignes de courant sont des droites // aux génératrices.

Dans ces conditions, la répartition des pressions suivant la normale aux lignes de courant est hydrostatique. Pour une section droite $p^* = p + \rho g h = Cte =$ **pression statique**

La pression statique peut être mesurée à l'aide d'un tube piézomètrique. C'est un tube de forme et d'inclinaison quelconques qui débouche dans la conduite et qui est ouvert aux deux extrémités. L'extrémité donnant sur la conduite est une prise de pression statique.



Le fluide monte dans le tube jusqu'en B_I**, la cote de** B_I **étant égale à** $\frac{p^*}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + h$ **(7)**

En effet $p + \rho g h$ **est constant le long du tube** $A_1 B_1$ **(hydrostatique). Cette quantité est aussi constante le long de la section droite S de la conduite. Si la pression ne subit pas de discontinuité au niveau du tube,** $p + \rho g h$ **ne change pas en** A_I **quand on passe du tube dans la canalisation.**

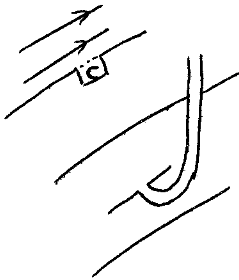
On a donc $p_{A_I} + \rho g\, h_{A_I} = p_{B_I} + \rho g\, h_{B_I}$

$$h_{B_I} = \frac{p_{A_I} - p_{B_I}}{\rho g} + h_{A_I}$$

$h_{B_I} = \frac{p}{\rho g} + h$, p étant la pression relative

La cote de B_I mesure donc bien $\frac{p}{\rho g}$ + h régnant au niveau de la section S. Elle ne dépend pas de la position de la prise de pression sur le pourtour ou à l'intérieur de la section droite de la canalisation.

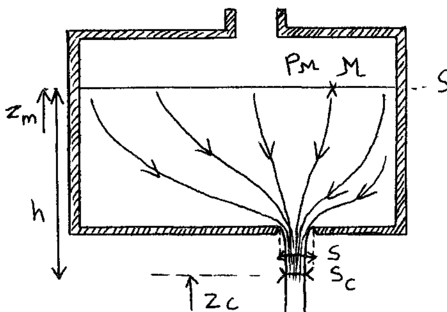
Remarque : I) l'introduction de la prise de pression ne doit pas perturber l'écoulement. Sur le pourtour, on peut utiliser une petite cavité C qui se remplit de fluide mort. A l'intérieur d'une canalisation, on associe la prise de pression statique à une portion de paroi plan continue parallèle aux lignes de courant.



2) p est la pression relative : pression prise à partir de la pression atmosphérique $p = p' - p_a$

III-I 2) Ecoulement à travers un orifice percé dans une paroi mince - Théorème de TORRICELLI :

Considérons un réservoir de section S comportant un orifice circulaire de section s. L'orifice est à bord mince : il est taillé en biseau vers l'extérieur de sorte qu'on peut considérer qu'on a affaire à une paroi mince.



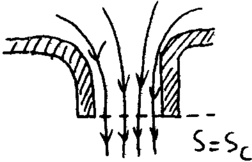
Le liquide s'écoule à travers l'orifice et forme dans l'air un jet vertical. Par visualisation du liquide, on peut observer les lignes de courant : tout le liquide participe à l'écoulement et les lignes de courant convergent avant d'atteindre l'orifice et cette convergence se poursuit au-delà de l'orifice.

La section du jet diminue rapidement jusqu'à atteindre une section constante s_C qu'on appelle section contractée. Les lignes de cou-

rant à partir de s_c sont pratiquement parallèles.

Le rapport $C_c = s_c/s$ est le coefficient de contraction.

Ce coefficient est voisin de 0,6 pour les orifices circulaires ou mêmes rectangulaires. Si l'orifice a le profil d'une tuyère le jet libre ne présente plus de contraction et dans ce cas $s_c = s$ et $C_c = I$.



Quand on se déplace perpendiculairement à des trajectoires rectilignes ou peu courbées (rayon de courbure R grand), la composante de l'accélération $\gamma_{\vec{n}}$ suivant la normale $\vec{n}$ principale à la trajectoire est nulle ($\gamma_{\vec{n}} \cong \frac{V^2}{R} \cong 0$)

Projetons l'équation d'EULER suivant cette normale $\vec{n}$; il vient :

$$\gamma_{\vec{n}} = \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{F} - \frac{I}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\ p) = 0$$

Dans le champ de pesanteur $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}}\ V = - \overrightarrow{\text{grad}}\ gh$

$$\text{soit } \text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{\text{grad}}(p+\rho gh) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}p^*. \ d\vec{n} = 0$$

ou $\frac{\partial p^*}{\partial n} = 0$, $p^* =$ Cte dans une direction normale aux trajectoires ou lignes de courant.

La répartition des pressions dans une section normale aux lignes de courant quand celles-ci sont droites ou peu courbées est hydrostatique.

Cette condition n'est pas réalisée dans la partie convergente du jet. Par contre pour la surface s_c, on a $(p + \rho gz)_c =$ Cte

Mais pour la surface s_c, $z_c =$ Cte donc

$p_c =$ Cte = pression au bord du jet dans la section $s_c = p_a$

Considérons l'écoulement pendant un temps assez court pour que la variation du niveau du réservoir puisse être négligée et que le mouvement soit considéré comme permanent. Considérons un filet fluide issu d'un point M de la surface libre et passant par un point C de s_c ; nous pourrons appliquer le théorème de BERNOULLI :

$$\frac{V_M^2}{2} + g\ z_M + \frac{p_M}{\rho} = \frac{V_C^2}{2} + g\ z_C + \frac{p_C}{\rho}$$

$$p_c = p_a$$

$$\frac{1}{2}(V_C^2 - V_M^2) = \frac{p_M - p_a}{\rho} + g\,(z_M - z_c)$$

Si on pose $z_M - z_c = h$ et si on néglige la vitesse à la surface libre (étant donné le rapport des sections S et s_c : le débit en volume dq_v du filet de courant est égal à $dq_v = V_M\, dS_M = V_C\, ds_c$. dS_M/ds_c est du même ordre de grandeur que $\frac{S}{s_c}$ et par conséquent $\frac{V_M}{V_C} \ll 1$), on obtient pour V_C:

$$V_C = \sqrt{2\left(\frac{p_M - p_a}{\rho} + gh\right)} \qquad (I)$$

Examinons un cas particulier important : Le récipient est en communication avec l'atmosphère ; $p_M = p_a$ et la relation (I) devient :

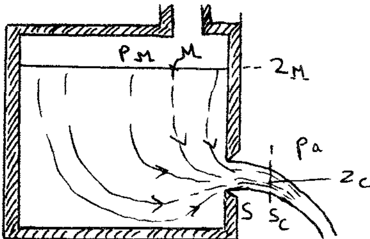
$$V_C = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

c'est le <u>théorème de TORRICELLI</u>.

La vitesse du fluide non visqueux dans la section contractée est la même que s'il tombait en chute libre d'une hauteur h.

<u>REMARQUES</u> : I) La forme du jet après la section contractée n'est pas exactement cylindrique mais légèrement conique (cf exercice : application du théorème de BERNOULLI)

2) <u>Orifice à paroi mince percé sur la paroi verticale</u>.



La ligne moyenne du jet n'est plus verticale mais forme une parabole d'axe vertical dont la position permet de déterminer la vitesse dans la section contractée. Mais le jet présente encore une section contractée.

Les résultats précédents peuvent être appliqués à condition que le diamètre de l'orifice soit assez faible pour que l'on puisse admettre que z_c = Cte.

3) L'application du théorème de BERNOULLI n'est valable que si le fluide n'est pas visqueux. Toutefois s'il n'en est pas ainsi, le frottement du fluide sur la paroi n'entraînera qu'une très faible perte de charge, la paroi étant très mince.

En effet, l'expérience montre que la vitesse réelle du fluide est

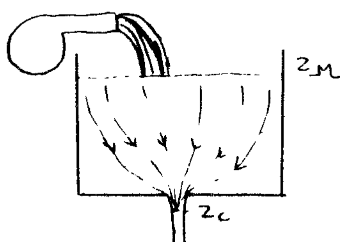
à peine inférieure à la valeur calculée.
A cause des frottements, la vitesse réelle est V_{CR}, V_{CR} étant inférieur à V_C. Le rapport $\frac{V_{CR}}{V_C} = C_v$ est le coefficient de vitesse (compris habituellement entre 0,95 et 0,99). Ainsi le débit volumique est égal à :

$$q_v = s_c\ V_{CR} = C_c\ s\ V_{CR} = C_v C_c s\ V_C = C_q\ s\ V_C$$

$C_q = C_v\ C_c$ étant le coefficient de débit de l'orifice :

$$q_v = C_q\ s\ \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

4) Application : mesure du débit d'une pompe :

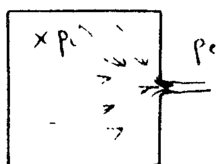


Une pompe dont le débit est constant alimente un récipient ouvert. Le débit de l'orifice croit au fur et à mesure que le niveau dans le récipient monte. Lorsque ce débit est égal au débit de la pompe, le niveau reste constant dans le récipient. Ainsi la mesure de $z_M - z_c = h$ permet de mesurer le débit :

$$q_v = C_q\ s\ \sqrt{2gh}$$

C_q étant déterminé par un étalonage.

5) Cas d'un gaz : Le gaz est à la pression p_i à l'intérieur du réservoir et se détend à la pression p_e par un petit orifice. Si p_i n'est pas trop grand devant p_e, le jet gazeux a un comportement analogue au jet liquide (contraction avec $C_c = 0,6$) mais les effets de pesanteur sont négligeables et le jet est rectiligne.



Si $\frac{p_i - p_e}{p_i} \ll 1$, le gaz peut être considéré comme incompressible. On peut donc appliquer la relation de BERNOULLI :

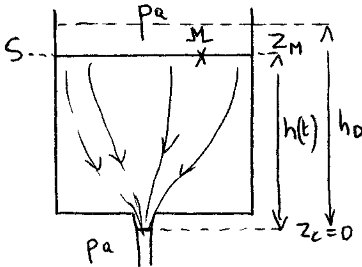
$$p_i + \rho\frac{V_i^2}{2} = p_e + \rho\frac{V_c^2}{2}$$

$V_i^2 \ll V_c^2$ soit

$$V_c = \sqrt{\frac{2(p_i - p_e)}{\rho}} \qquad (4)$$

et $q_v = C_q\ s\ V_c$

EXERCICES : I) Temps de vidage d'un récipient et loi de variation



de h avec t. Nous supposons que le rapport S/s est grand pour l'écoulement soit considéré comme permanent à tout instant. On a $V_c(t) = \sqrt{2\,g\,h(t)}$ soit $q_v(t) = C_q\, s\sqrt{2\,g\,h(t)}$

Pendant l'intervalle de temps dt, il s'écoule un volume de liquide

$$dv = q_v\, dt = -S\, dh = C_q\, s\sqrt{2\,g\,h(t)}\, dt$$

soit

$$dt = -\frac{S\, dh}{C_q\, s\,\sqrt{2gh(t)}}$$

La durée t_I du vidage est égale à : (on considère que la section contractée et l'orifice ont pratiquement la même cote)

$$t_I = \int_0^{t_I} dt = -\int_{h_0}^{0} \frac{S\, dh}{C_q\, s\sqrt{2gh}}$$

Pour calculer t, il faut considérer la variation de S avec h.

Si le récipient est cylindrique S = Cte

$$t_I = \frac{S}{C_q\, s\sqrt{2g}}\, 2(h_0)^{I/2} = \frac{S}{C_q\, s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \frac{2S\, h_0}{C_q\, s\,\sqrt{2gh_0}}$$

Sh_0 = volume total de liquide

$C_q s\sqrt{2gh_0}$ = débit volume à l'instant initial

La loi de variation de h avec t est la suivante :

$$-\frac{dh}{\sqrt{2h}} = C_q\,\frac{s}{S}\sqrt{g}\, dt$$

soit en intégrant $\displaystyle\int_{h_0}^{h} -\frac{dh}{\sqrt{2h}} = C_q\frac{s}{S}\sqrt{g}\int_0^t dt$

$$\sqrt{2}\,(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}\,) = C_q\,\frac{s}{S}\sqrt{g}\; t$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{C_q}{\sqrt{2}}\,\frac{s}{S}\,\sqrt{g}\; t$$

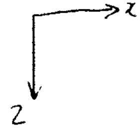
h = 0 pour $t = t_I$. On retrouve $t_I = \dfrac{\sqrt{h_0}}{C_q}\,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}}\,\dfrac{S}{s}$

On peut donc écrire : $\sqrt{h} = \frac{C_q}{\sqrt{2}} \frac{s}{S} \sqrt{g} (t_I - t)$

soit $h = A^2 (t_I - t)^2$

La hauteur du liquide est une fonction parabolique du temps.

II) Forme du jet : parabole d'axe vertical : $\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\vec{g}$ dans le cas d'un orifice percé sur la paroi verticale.



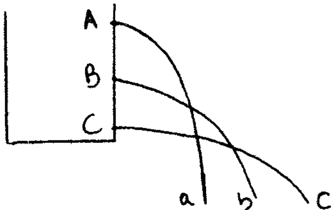
$\gamma_x = 0 = \frac{d^2x}{dt^2}$ $\quad v_x = \frac{dx}{dt} = V_c$ $\quad x = V_c\, t$

$\gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} = g$ $\quad v_z = \frac{dz}{dt} = gt$ $\quad z = \frac{gt^2}{2}$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant t entre les expressions de x et z :

$$z = \frac{g}{2V_c^2}\, x^2$$

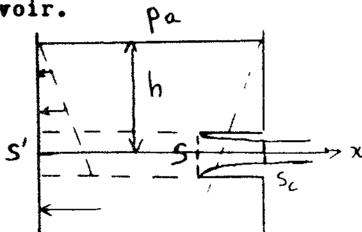
Si on considère des jets provenant d'orifice placés à différents niveaux, on obtient une série de paraboles.



Remarque : Le temps de vidage et la forme de la parabole ne dépendent pas de la densité du liquide. Ainsi deux volumes d'eau et de mercure s'écoulent dans le même temps.

Calcul du coefficient de contraction d'un orifice - Orifice de BORDA (ajutage cylindrique intérieur.)

Le liquide est pratiquement au repos tout le long des parois du réservoir.



La longueur L du tube est assez grande pour qu'on puisse négliger la vitesse du liquide au voisinage des parois du réservoir et assez courte pour que le jet soit libre dans le tube (ne recolle pas contre les parois).

La répartition des pressions peut donc être considérée comme hydrostatique. Les forces de pression sur les parois intérieures du vase s'équilibrent deux à deux sauf en ce qui concerne la section s du tube et la section s' projection de s sur la paroi opposée. Les

forces de pression exercées par le liquide sur s' sont égales à (égales aussi aux forces de pression exercées par la surface s' de la paroi sur le liquide) : $(p_a + \rho gh).s$

Appliquons le théorème d'EULER à la surface S fermée suivante : parois du réservoir, surface libre, section droite du jet s_c et surface latérale du jet jusqu'à cette section droite.

débit total de la quantité de mouvement sortant par S

$$\int_S dq\, \vec{V} = \Sigma \vec{F}$$ forces appliquées au fluide contenu dans S

Calculons $\Sigma \vec{F}$: Les forces de surface comprennent : suivant l'axe Ox du tube

- forces de pression exercées par les parois mouillées soit $(p_a + \rho gh)\ s$
- forces de pression qu'exerce l'atmosphère sur la portion de jet libre compris entre la surface s et la section s_c du jet : ces forces sont égales aux forces de pression qui s'exercent sur la projection de la surface perpendiculairement à cet axe soit : $- p_a s$ (voir chapitre STATIQUE)

La somme des projections sur l'axe du tube des forces de pression exercées sur le liquide contenu à l'intérieur de S est donc :

$$(p_a + \rho gh)\ s - p_a\ s = \rho ghs$$

En régime permanent (h = Cte), la projection sur l'axe du tube de la quantité de mouvement qui sort par S par unité de temps est égale à : $q\ V_c = \rho q_v\ V_c = \rho\ s_c\ V_c^2 = \rho s_c\ 2\ gh$

D'après le théorème d'EULER : $\rho s_c\ 2\ gh = \rho\ ghs$

On en déduit que le coefficient de contraction $C_c = s_c/s$

$$C_c = s_c/s = I/2$$

<u>Remarque I</u> : En fait pour le débit q_v il faudrait prendre $C_q sV_c$

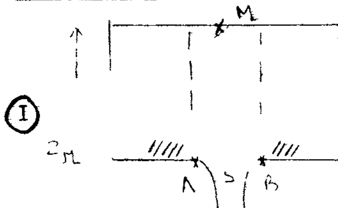
$$C_c = s_c/s \qquad q_v = C_q sV_c = C_v s_c V_c$$

et dans ces conditions on a

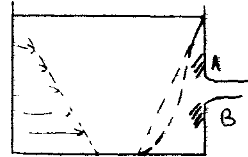
$$C_v C_c = I/2$$

$C_q = C_v C_c$ = coefficient de débit est égal à 0,5. C_v étant compris entre 0,97 et 0,99, C_c est légèrement supérieur à I/2.

Remarque 2 : Cas d'un orifice en paroi mince



ou II



(I) $\vec{R} + \vec{P} = \rho sgh$ car $\vec{R}$ est égal au poids du liquide non hachuré (statique)

(II) ici la composante verticale de R + P est nulle

Le coefficient de contraction est supérieur à 0,5.

En effet, la vitesse du fluide le long des parois au voisinage de l'orifice (portions hachurées A et B) ne peut plus être négligée comme dans le cas de l'orifice de BORDA.

Il y a une zone de dépression : la pression est plus faible d'après le théorème de BERNOULLI $p_a + \rho g z_M = p_A + \rho g z_A + \rho \frac{V_A^2}{2}$

soit $p_A = p_a + \rho gh - \rho \frac{V_A^2}{2}$

Il y a diminution de p_A quand V_A est différent de zéro.

Ainsi la somme des projections des forces de pression qui s'exercent sur le liquide sont donc supérieures à ρghs. La projection de la quantité de mouvement restant égale à $\rho s_c 2\ gh$, on a l'inégalité suivante (théorème d'EULER)

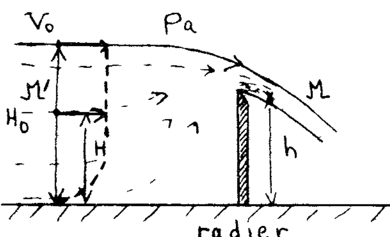
projection sur axe du tube $\Sigma \vec{F} = \rho s_c\ 2\ gh > \rho\ ghs$

soit $C_c > 0,5$

Le coefficient de contraction est supérieur à 0,5.

III-I 3) Ecoulement par dessus un déversoir à bord mince :

Un déversoir est un barrage construit en travers d'un écoulement (un canal par exemple) qui permet de relever le niveau amont et de mesurer le débit.



L'écoulement peut être considéré comme étant à deux dimensions. Nous pouvons appliquer le théorème de BERNOULLI. Ainsi, la vitesse V d'un point M est égale à :

$$\rho\frac{V_M^2}{2} + p_M + \rho gh = \rho\frac{V_{M'}^2}{2} + p_{M'} + \rho gH$$

Assez loin du déversoir, les trajectoires sont rectilignes : par conséquent (cf § III-1 2) :

$$p_{M'} + \rho gH = Cte = p_a + \rho gH_o$$

D'autre part, la vitesse peut être considérée comme constante(égale à V_o) le long d'une section normale au sens d'écoulement.
En conséquence, il vient :

$$\rho\frac{V_M^2}{2} + p_M + \rho gh = \rho\frac{V_o^2}{2} + p_a + \rho gH_o$$

Si le point M est pris à la surface : $p_M = p_a$

$$\frac{V_M^2}{2} = \frac{V_o^2}{2} + g(H_o - h)$$

Si on néglige V_o devant V_M, $V_M = \sqrt{2\, g(H_o-h)}$ (5)

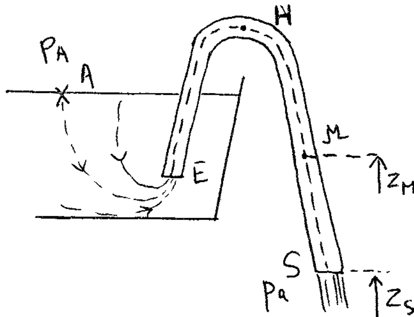
La connaissance de V_M se déduit à partir de la mesure de H_o-h qui peut être effectuée à l'aide d'un flotteur.
Le débit en volume du déversoir est donné par la relation:

$$q_v = C_\rho \, S\sqrt{2g(H_o-h)}$$

C_ρ = coefficient empirique de débit
S = section dans le plan du déversoir

<u>EXERCICE</u> **<u>Ecoulement par siphon</u>**

Un siphon est une conduite de section constante s qui permet l'écoulement d'un liquide à partir d'un réservoir, une partie de cette conduite se trouvant au dessus de la surface libre du réservoir



(l'écoulement ne s'amorce que si on remplit au préalable la canalisation). La section s pourra être considérée comme suffisamment réduite pour qu'on puisse négliger les variations de cotes dans les sections droites ; c'est à dire p ≉ Cte.
La vitesse d'écoulement V_m est la même dans toute section droite

(mouvement conservatif). Le jet à la sortie est supposé cylindrique : ainsi la pression dans le jet est uniforme et égale à p_a. La vitesse à la surface libre est négligeable.
Appliquons le théorème de BERNOULLI entre la surface libre et les sections passant par M et S :

$$p_a + \rho g z_A = \frac{\rho V_m^2}{2} + p_M + \rho g z_M = \rho V_m^2 + p_a + \rho g z_S$$

Soit $\quad V_M^2 = 2\,g(z_A - z_S) \qquad (6)$

$$(q_v)_{theo} = s\,V_m = s\left[2g(z_A - z_S)\right]^{1/2}$$

$$p_M = p_a - \rho g(z_M - z_S)$$

La cote du point H n'intervient pas. V_m croît avec la différence $z_A - z_S$ mais il existe une limite qu'il n'est pas possible de dépasser.
En effet, la pression est minimale au point H :

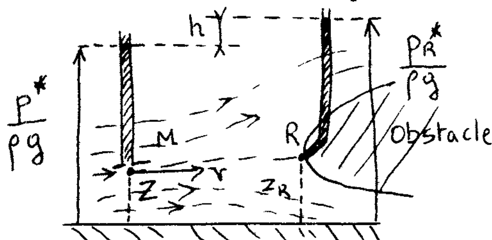
$$p_H = p_a - \rho g(z_H - z_S)$$

La limite inférieure de p_H est égale à la pression de vapeur naturente du liquide : p_{vS}. Lorsque par accroissement de $z_H - z_S$, p_H atteint p_{vS}, il forme en H des bulles de vapeur : c'est le phénomène de cavitation. Les équations des fluides homogènes ne s'appliquent plus et le siphon peut se désamorcer.
La différence de cote limite est donc :

$$(z_H - z_S)_{lim} = (p_a - p_{vS})/\rho g$$

III-I 4) Pression d'arrêt. Tube de PITOT :

Pression d'arrêt : Considérons un obstacle immobile dans un fluide incompressible en mouvement permanent.



L'obstacle écarte les lignes de courant et en amont de l'obstacle il y a une zone réduite où la vitesse d'écoulement est faible (ex : pile de pont).
Il existe donc une ligne MR qui

s'arrête sur l'obstacle en R. R est un <u>point d'arrêt</u> : $V_R = 0$.
Appliquons la relation de BERNOULLI :

$$p_R + \rho g z_R = p_M + \rho g z + \rho \frac{V_M^2}{2}$$

$$p_R^* = p_M^* + \rho \frac{V_M^2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{p_R^*}{\rho g} = \frac{p_M^*}{\rho g} + \frac{V_M^2}{2g}$$

Si on place un tube piézomètrique en R, la cote du fluide donnera la quantité $\frac{p_R^*}{\rho g}$.

Si en M on met une prise de pression statique, le tube indiquera $\frac{p_M^*}{\rho g}$. La dénivellation entre les 2 tubes h est égale à $\frac{V_M^2}{2g}$.

On a par conséquent $\boxed{V_M = \sqrt{2gh}}$ (8)

Sans obstacle, la ligne de courant MR se poursuivrait et en R' la vitesse $V_{R'}$ serait différente de zéro.
D'après la relation de BERNOULLI :

$$\frac{\rho V_M^2}{2} + p_M + \rho g z = \frac{\rho V_{R'}^2}{2} + p_{R'} + \rho g z_R$$

Si le point M n'est pas trop voisin de R afin qu'on puisse admettre que l'écoulement n'est pas modifié par l'obstacle (en M) : la quantité précédente est aussi égale à $p_R + \rho g z_R$ en présence de l'obstacle. On en déduit donc :

$$p_{R'} + \rho \frac{V_{R'}^2}{2} = p_R$$

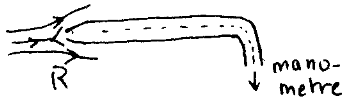
La pression au point d'arrêt ou <u>pression d'arrêt</u> p_R est toujours supérieure $p_{R'}$: c'est la pression <u>totale</u> de l'écoulement préexistant en R' (pression statique +pression dynamique). La prise de pression R s'appelle pour cette raison prise de <u>pression totale</u>.

<u>REMARQUE</u> : <u>Cas des gaz</u> : On peut négliger $\rho g z$ devant p
On a ainsi $p_R = p_M + \rho \frac{V_M^2}{2}$

$$V = \sqrt{2 \frac{p_R - p_M}{\rho}} \quad (9)$$

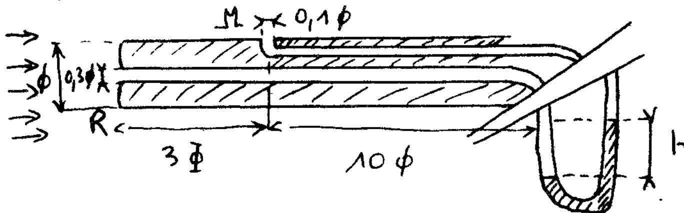
Les pressions p_R et p_M peuvent être mesurées à l'aide de manomètres ou $p_R - p_M$ à l'aide d'un manomètre différentiel.

Tube de PITOT simple : C'est une antenne de pression totale. Ses dimensions transversales doivent être assez faibles afin de limiter les perturbations. Le tube recourbé relié au manomètre remplace l'obstacle.



double :(ou tube de PITOT-PRANDTL) Appareil qui permet de mesurer les vitesses d'écoulement en un point.

Il est constitué d'une prise de pression totale R et d'une prise de pression statique M reliées à un manomètre différentiel.

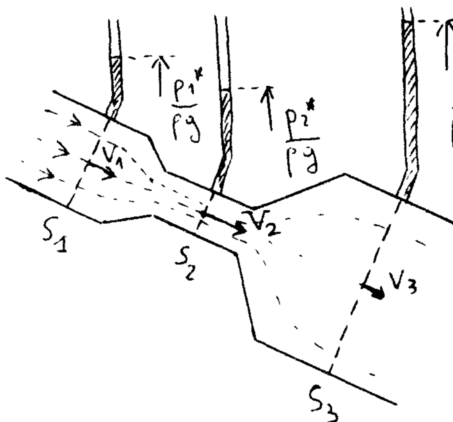


L'appareil doit être placé parallèlement aux lignes de courant. La vitesse d'écoulement est donné par les relations (8) ou (9). Cet appareil est très utile car il permet une mesure facile des vitesses écoulement (ex : vent, fluide, etc...).

III-I 5) Phénomène de VENTURI - Mesure des débits :

Phénomène de VENTURI :

Considérons une conduite dont la section S est variable.



Si on place 3 prises de pression statique à l'entrée, à l'endroit le plus étroit et à la sortie, on observe des niveaux différents dans les tubes piézomètriques.

Si on admet que la conduite se comporte comme un filet de courant (la vitesse V est uniforme dans une section quelconque), on peut appliquer le théorème de BERNOULLI :

$$\frac{P^*}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = Cte$$

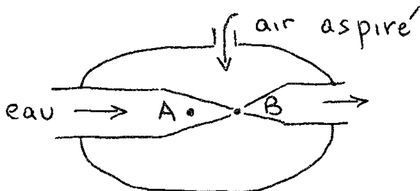
D'autre part, la conservation du débit volumique s'écrit :

$$q_v = S_I V_I = S_2 V_2 = S_3 V_3 = Cte$$

Si S diminue, V augmente et par suite p^* diminue.

S et p^* varient donc dans le même sens. Ainsi dans la partie la plus étroite de la conduite, il existe des dépressions qui peuvent être importantes.

APPLICATIONS : I) Trompe à eau (vide) : Supposons qu'un point A, la pression absolue de l'eau est la pression atmosphérique.

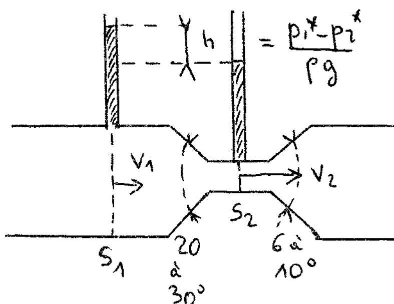


Au niveau de l'étranglement, la pression p_B est inférieure à p_A. Ainsi l'air se trouve aspiré en B et entraîné par l'eau.

2) Carburateur d'un moteur à explosion : L'aspiration et la pulvérisation de l'essence sont provoquées par l'écoulement de l'air de carburation issu de l'atmosphère dans un conduit qui comporte un rétécissement ("buse") au niveau duquel l'accroissement de vitesse entraîne une dépression qui aspire l'essence.

3) Mesure de débit : tube de VENTURI :

C'est une canalisation convergente-divergente qu'on intercale dans la conduite dont on veut mesurer le débit.



Nous avons :

$$\frac{p_I^*}{\rho g} + \frac{V_I^2}{2g} = \frac{p_2^*}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_I S_I = V_2 S_2 = q_v$$

d'où $$\frac{p_I^* - p_2^*}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_I^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}\left[I - \frac{V_I^2}{V_2^2}\right] = \frac{V_2^2}{2g}\left[I - \left(\frac{S_2}{S_I}\right)^2\right]$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{I - \left(\frac{S_2}{S_I}\right)^2}} \sqrt{\frac{p_I^* - p_2^*}{\rho g}}$$

Le débit de la conduite est égale à :

$$q_v = S_2\, V_2 = \frac{S_2\sqrt{2g}}{\sqrt{I-(\frac{S_2}{S_I})^2}}\sqrt{\frac{p_I^*-p_2^*}{\rho g}} \qquad (IO)$$

$$q_v = S_2\sqrt{\frac{2gh}{I-(\frac{S_2}{S_I})^2}} \qquad (IO\ bis)$$

$h = \dfrac{p_I^*-p_2^*}{\rho g}$ se détermine à l'aide de deux tubes piézomètriques ou à l'aide d'un manomètre différentiel.

Si le tube est disposé horizontalement ou si le fluide est un gaz, la mesure de $p_I^* - p_2^*$ se ramène à la mesure de $p_I - p_2$.

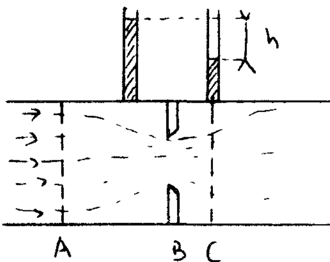
<u>REMARQUE</u> : I) Le divergent ne doit pas être trop ouvert pour que les lignes de courant ne se décollent pas de la paroi ($<10°$).
Le convergent peut avoir un angle plus grand.

2) Le débit réel $q_{vr} = \xi q_v$

ξ étant un coefficient correctif qu'on détermine par un étalonnage.

<u>EXERCICE</u> : <u>Mesure des débits : diaphragme</u> (organes déprimogènes plus simples que les tubes de VENTURI mais moins précis).

Le diaphragme est une ouverture circulaire effectuée dans une paroi mince. La section de la veine fluide présente un minimum légérement en aval du diaphragme. Calculer le débit de la conduite en fonction de h, d et D diamètres du diaphragme et de la conduite.



Appliquons le théorème de BERNOULLI :

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{V_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\rho g}$$

(les cotes sont identiques)

D'autre part $q_v = S_A\, V_A = S_B\, V_B = S_C\, V_C$

La valeur de S_C est légèrement inférieure à S_B . Supposons en Ière

approximation que $S_B = S_C$, $V_B = V_C$.

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{V_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\rho g}$$

Soit $$\frac{p_A - p_C}{\rho g} = \frac{V_C^2}{2g}\left[I - \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^2\right] = \frac{V_B^2}{2g}\left[I - \left(\frac{S_B^2}{S_A}\right)\right]$$

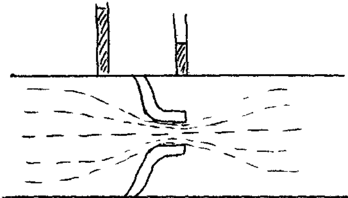
$$h = \frac{p_A - p_C}{\rho g} = \frac{I}{2g}\,\frac{Q_v^2}{S_B^2}\left(I - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

$$\boxed{Q_v = S_B\sqrt{\frac{2gh}{I - \frac{d^4}{D^4}}}}$$

En fait cette relation n'est pas rigoureuse car la section réduite n'est pas égale à S_C et parce qu'il y a des pertes de charge.
On introduit par conséquent un terme correctif :

$$Q_{v\text{réel}} = \alpha Q_{v\text{théorique}} \qquad \alpha \simeq 0{,}6$$

Tuyère : Instrument de mesure intermèdiaire entre le diaphragme et le VENTURI.

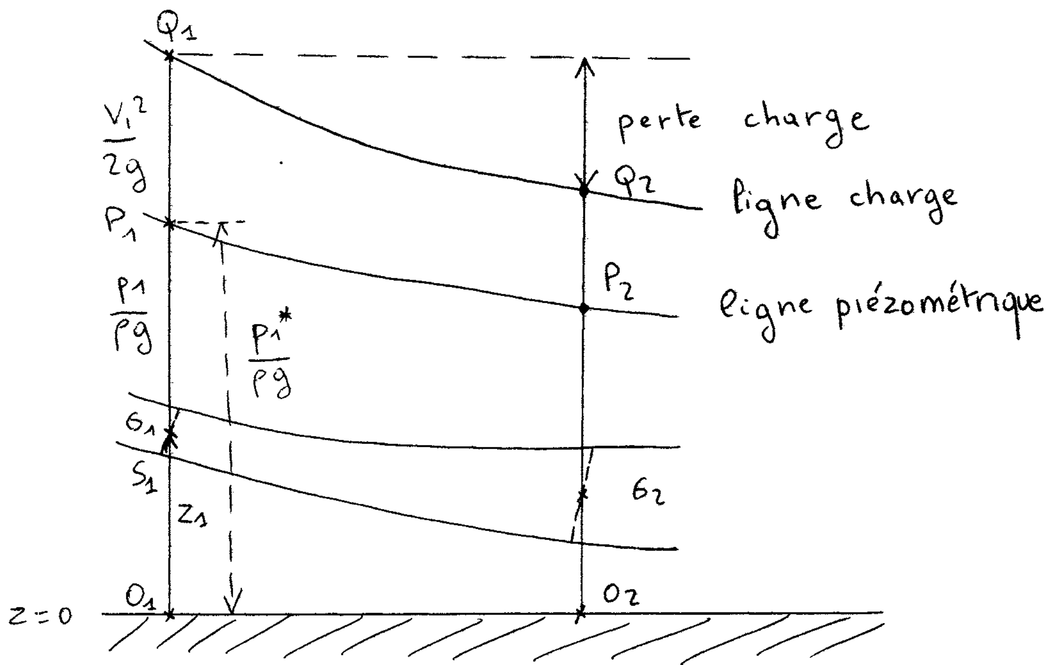


Le fluide épouse le contour de la tuyère mais il n'y a pas de partie divergente. La relation donnant le débit est la même que pour le VENTURI ou le diaphragme :

$$Q_v = S_B\sqrt{\frac{2gh}{I - \frac{d^4}{D^4}}}$$

III-I 6) Représentation graphique de l'écoulement :

72 bis



Q1
perte charge
Q2
ligne charge
P1
P2
ligne piézométrique
$\frac{V_1^2}{2g}$
$\frac{p_1}{\rho g}$
$\frac{p_1^*}{\rho g}$
G1
S1
G2
Z1
O1
O2
z = 0

On porte sur la verticale passant par le centre de gravité d'une section :

- une longueur $OG_I = z_I$ = cote du point G_I qui représente le terme de pesanteur.
- une longueur $G_IP_I = \frac{p_I}{\rho g}$ qui représente le terme de pression. La cote du point P_I est la hauteur piézomètrique (niveau du tube piézomètrique relié à une prise de pression statique dans la section S_I). Quand on considère les différentes sections de la conduite, le point P_I décrit une courbe qu'on appelle <u>ligne piézomètrique</u>.
- une longueur $P_IQ_I = \frac{V_I^2}{2g}$ qui représente le terme d'énergie cinétique.

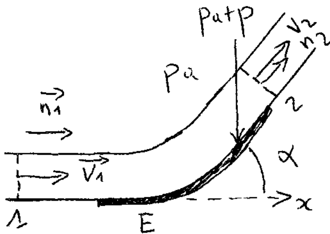
Le point Q_I décrit la <u>ligne de charge</u>. La cote de Q_I est égale à la charge totale dans la section S_I.

Dans le cas des fluides parfaits, s'il n'y a pas de générateurs ou récepteurs, la charge totale est constante et la ligne de charge est horizontale (plan de charge). Pour les fluides réels, il y a toujours des pertes d'énergie de sorte que la ligne de charge est descendante. La différence représente la perte de charge.

II-2 <u>Applications du théorème d'EULER</u> :

II-2 I) <u>Action exercée par un jet sur une plaque plane fixe</u> :

Considérons une plaque plane faisant un angle α avec un jet horizontal de vitesse uniforme V. Le fluide est dévié par l'intermèdiaire de l'épaulementE.



Les vitesses dans les sections I et 2 sont identiques ; en effet l'écoulement étant à pression constante, l'application du théorème de BERNOULLI conduit à l'égalité suivante :

$$p_a + \rho gz + \rho\frac{V^2}{2} = p + \rho gz + \rho\frac{V^2}{2}$$

Appliquons le théorème d'EULER à la surface fermée S délimitée par les 2 sections I et 2 et la surface extérieure du jet.

Les forces extérieures qui agissent sur le fluide contenu à l'inté-

rieur de la surface considérée sont :

- le poids du fluide : vertical (on néglige les effets de pesanteur)
- les forces de pression : p_a pour les éléments en contact avec l'atmosphère et p_a+p pour les éléments en contact avec la plaque.

La résultante des forces de pression atmosphérique est égale à la poussée de l'air et par conséquent $\simeq 0$.

(Pour les sections droites I et 2, on a :

$$p + \rho gz = Cte = (p+ \rho gz)_{bord\ jet} = p_a + \rho gz_{bord\ jet}$$

Si on néglige les effets de pesanteur, on a $p = p_a$.)

Seule intervient la résultante des forces de pression p.

La résultante des forces de pression de la plaque sur le fluide est donc égale à (théorème d'EULER) :

$\vec{R} = q\ V\ (\vec{n_2}-\vec{n_I})$ — $\vec{n_2}$, $\vec{n_I}$ étant les vecteurs unitaires perpendiculaires aux sections I et 2

$\vec{V_I} = V\ \vec{n_I}$ $\quad$ $\vec{V_2} = V\ \vec{n_2}$

L'action du jet sur la plaque est égale à :

$$\vec{Q} = -\ \vec{R} = q\ V\ (\vec{n_I}-\vec{n_2}) \qquad (II)$$

La composante Q_x de cette action a pour valeur :

$$Q_x = \vec{Q}.\vec{n_I} = q\ V\ (I-\cos\alpha)$$

$(\vec{n_I}.\vec{n_2}) = \cos\alpha$

$$\boxed{Q_x = q\ V\ (I-\cos\alpha)} \qquad (I2)$$

Ce résultat est indépendant de la <u>forme prise par l'écoulement</u> entre les 2 sections I et 2. Le débit massique q étant à ρVs (s étant la section droite du jet). On a :

$$Q_x = \rho\ V^2\ s\ (I-\cos\alpha)$$

La poussée suivant la direction initiale du jet se fait dans le sens de l'écoulement. Elle est maximale pour $\alpha=\pi$ et vaut alors $2q\ V$.

<u>Remarque</u> : Ce phénomène est utilisé dans les turbines hydrauliques PELTON mais dans ce cas l'auget de turbine n'est pas fixe. Si V_0 est la vitesse de translation reetiligne uniforme parallèle a u jet initial.

Par rapport à un observateur lié à l'auget, la surface S étant liée à l'auget, le même raisonnement que précédemment conduit à :

$$Q_x = V' \, q' \, (I - \cos\alpha) = \rho V'^2 s \, (I - \cos\alpha)$$

V' étant vitesse relative du jet, la vitesse réelle étant égale à

$$\vec{V} = \vec{V'} + \vec{V_o}$$

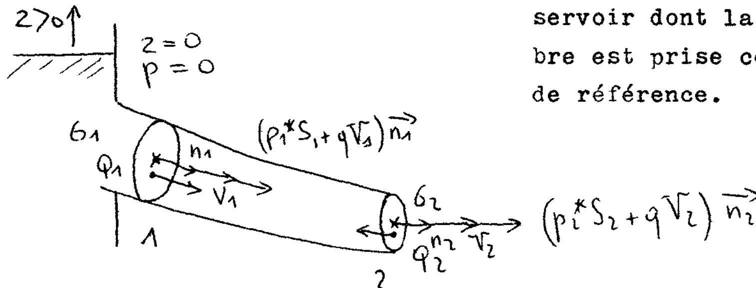
soit $Q_x = \rho (V - V_o)^2 s \, (I - \cos\alpha)$

<u>Exemple</u> : q=3o l/s diamètre du jet 3 cm α= I65°

Q_x = 2500 N = 250 kgf

III-2 2) <u>Action d'un fluide sur une tuyauterie</u> :

Considérons deux sections I et 2 d'une conduite reliée à un réservoir dont la surface libre est prise comme plan de référence.



Appliquons le théorème d'EULER :

$$q \vec{V_2} - q \vec{V_I} = \vec{R} + \vec{P}$$

$\vec{R}$: forces surface ; $\vec{P}$: forces volume (pesanteur)

$q\vec{V}$ étant appliqué au centre de gravité de la section

$\vec{R}$ comprend :

- les forces de pression sur les sections I et 2 exercées par le fluide soit $\int_{S_I} p_I \, dS_I \, \vec{n_I}$ et $- \int_{S_2} p_2 \, dS_2 \, \vec{n_2}$

- la réaction R_T des parois du tuyau sur le fluide (réaction égale et opposée à la force Q exercée par le fluide sur les parois du tuyau).

On a donc :

$$q\,(\vec{V_2}-\vec{V_I}) = \int p_I\, dS_I\, \vec{n_I} - \int p_2\, dS_2\, \vec{n_2} + \vec{P} + \vec{R_T}$$

d'où $\vec{Q} = -\vec{R_T} = q\,(\vec{V_I}-\vec{V_2}) + \int p_I\, dS_I\, \vec{n_I} - \int p_2\, dS_2\, \vec{n_2} + \vec{P}$

Nous allons calculer successivement l'action statique du liquide sur les parois puis l'action due au mouvement du fluide.

Cas des forces de pression sur les sections I et 2 :

Pour un point de cote z, la pression relative dans un fluide au repos est $p' = -\rho g z$ (voir figure).

Soit p la pression au même point dans le fluide en mouvement.

On a : $p^* = p + \rho g z = p - p'$

soit $p = p^* + p'$

Ainsi la poussée $\int_{S_I} p_I\, dS_I\, \vec{n_I}$ est la somme :

- d'un vecteur représentant la poussée hydrostatique sur S_I (terme p') et appliqué au centre de poussée Q_I
- d'un vecteur $\vec{P_I^*}$ (terme p^*) :

Dans la section droite S_I, $p_I^* =$ Cte donc P_I^* est appliqué au centre de gravité de S_I.

$$\vec{P_I^*} = p_I^*\, S_I\, \vec{n_I}$$

Il en est de même pour la section 2.

Cas de la réaction R_T :

R_T peut être décomposé en deux parties : $\vec{R_T'}$ et $\vec{R_T^*}$

$\vec{Q'} = -\vec{R_T'} =$ poussée hydrostatique du fluide sur les parois du tuyau

$\vec{Q^*} = -\vec{R_T^*} =$ poussée supplémentaire due au mouvement

On aura ainsi :

$$-(\vec{R_T'} + \vec{R_T^*}) = q\,(\vec{V_I}-\vec{V_2}) + \vec{P} + \vec{P_I'} + \vec{P_I^*} + \vec{P_2'} + \vec{P_2^*}$$

Dans un fluide au repos, l'ensemble des poussées qui s'exercent sur une surface fermée S est égale et opposée au poids du fluide contenu à l'intérieur de cette surface :

Ainsi $\vec{P} + \vec{P_I'} + \vec{P_2'} + \vec{R_T'} = 0$ $\qquad Q' = \vec{P} + \vec{P_I'} + \vec{P_2'}$

d'où $-\vec{R_T^*} = q\,(\vec{V_I} - \vec{V_2}) + \vec{P_I^*} + \vec{P_2^*}$

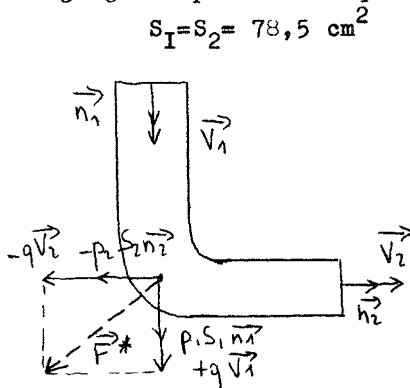
La poussée supplémentaire due au mouvement du fluide s'exerçant sur la tuyauterie est donc égale à :

$$Q^{*} = (p_{I}^{*}\, S_I + q\, V_I)\, \vec{n_I} - (p_2^{*}\, S_2 + q\, V_2)\, \vec{n_2} \qquad (I3)$$

La poussée hydrostatique augmente avec la cote z alors que la poussée dynamique n'en dépend pas : elle dépend de la vitesse du fluide.

<u>Exemple</u> : Considérons une conduite coudée à 90° de diamètre intérieur I00mm, avec un écoulement de 30l/s, la pression effective (ou relative : $p_e = p - p_a$) du fluide étant de 20N/cm². Calculer la résultante des forces dues au mouvement du fluide (on néglige le poids du liquide)

$S_I = S_2 = 78{,}5\ cm^2$



$p_I S_I = p_2 S_2 = 78{,}5 \times 20 = I750\ N$

$V_I = V_2 = \dfrac{30\ I0^{-3}}{78{,}5\ I0^{-4}} = 3{,}82\ m/s$

$qV_I = qV_2 = 30 \times 3{,}82 = II4{,}6\ N$

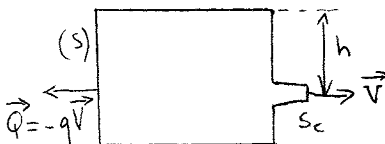
$\rho = 1000\ kg/_{m^3}$

Soit $F^{*} = (I750 + II4{,}6)\sqrt{2}$
$\simeq 2360\ N$

I litre = $I0^3\ cm^3 = I0^{-3} m^3$

III-2 3) <u>Réaction d'un jet issu d'un réservoir</u> :

Considérons un réservoir percé d'un orifice. Nous connaissons la répartition des vitesses dans le jet et le réservoir (application du théorème de BERNOULLI).



Appliquons le théorème d'EULER à la surface fermée S indiquée sur la figure (On considérera la projection horizontale).

On a F = q V

F = résultante suivant l'horizontale des forces appliquées au fluide contenu dans S (forces de pression exercées par les parois du réservoir)

$$F = \rho s_c V\, V = \rho s_c\, V^2 \qquad (I4)$$

Inversément, le réservoir subit une poussée Q égale et opposée qui est la <u>réaction du jet</u>. $Q = -\rho s_c V^2$

Si le fluide est un liquide, on peut appliquer le théorème de TORRICELLI : $Q = \rho s_c V^2 = 2 \rho s_c g z$ (I5)

La réaction du jet ne dépend que du liquide contenu dans le réservoir. Cette réaction tend à déplacer le réservoir en sens inverse du jet.

III-2 4) <u>Poussée d'un réacteur ou d'une fusée</u> :

a) <u>Cas d'un réacteur</u> :

La propulsion est obtenue en éjectant à l'arrière les gaz produits par combustion du pétrole dans de l'air préalablement comprimé.

Dans le cas d'un mouvement de translation uniforme de l'avion, l'air entre par le réacteur à la vitesse relative V par rapport au réacteur (système de référence lié à l'avion), les gaz étant éjectés à la vitesse relative W.

On peut négliger le débit massique de pétrole par rapport à celui de l'air ; le débit massique des gaz éjectés q est donc égal à celui de l'air entrant.

Appliquons le théorème d'EULER à la surface fermée tracée en pointillé.



La résultante des forces de pression est nulle ; la poussée sur le réacteur est égale à :

$$Q = q\ (W - V) \qquad (I6)$$

Cette poussée dépend de la vitesse V de l'avion.

Si V = 0, Q = qW : la poussée est maximum.

La vitesse maximum théorique de l'avion serait la vitesse W d'éjection des gaz ; dans ce cas $\vec{Q} = 0$.

En mouvement uniforme, la force Q = q (W - V) est compensée par la force de frottement de l'air s'exerçant sur l'avion. On peut calculer le rendement de la propulsion.

La puissance employée à cette propulsion est égale à :

$$Q\ V = q\ V\ (W-V)$$

La puissance fournie à l'air pour accroître son énergie cinétique de $I/2\ q\ V^2$ à $I/2\ q\ W^2$ est égale à :

$$P = I/2\ q\ W^2 - I/2\ q\ V^2 = I/2\ q\ (W+V)\ (W-V)$$

D'où le rendement de la propulsion :

$$R = \frac{QV}{P} = \frac{2V}{W+V} = \frac{2}{I+\frac{W}{V}} \qquad (I7)$$

Le rendement est toujours inférieur à I (=I si V tend vers W).

b) Cas d'une fusée :

Une fusée contient à la fois le combustible et le carburant.



La poussée est égale à :

$$Q = qW \qquad (I8)$$

Cette poussée est indépendante de la vitesse V de la fusée.

La puissance mise en jeu est :

$$QV = q\ WV$$

Dans le vide, la fusée subit une accélération γ égale à :

$$\gamma = \frac{Q}{M}$$

M = masse de la fusée à l'instant t

Cette masse diminue la quantité q par seconde si bien que, si ρ est constant, l'accélération augmente sans cesse jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de comburant.

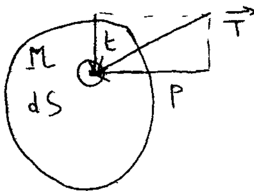
CHAPITRE IV

IV EQUATIONS DYNAMIQUES DES FLUIDES VISQUEUX

IV-I Coefficient de viscosité :

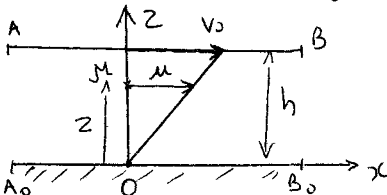
IV-I I) Définition :

La notion de fluide parfait n'est qu'une première approximation quand on considère la dynamique des fluides réels.
Alors que dans les fluides parfaits, la tension qui s'exerce sur un élément de surface dS est toujours normale à dS, dans les fluides réels les actions de contact présentent une composante tangentielle, qui joue le rôle d'une force de frottement. Ainsi, une nouvelle propiété des fluides est introduite : c'est la viscosité ou frottement interne.



La tension s'exerçant en un point M peut se décomposer en deux parties :
- composante normale : pression
- composante tangentielle

La viscosité introduit la composante tangentielle et modifie la composante normale. Ces forces tangentielles dites forces de viscosité s'opposent au glissement relatif des couches voisines.
L'expérience de principe suivante permet de montrer l'existence de ces forces de viscosité :
Soit une couche fluide assez mince comprise entre plaques planes parallèles ; l'une A_0B_0 est fixe, l'autre AB se déplace dans son plan avec une vitesse V_0.



On constate que le fluide en contact avec la plaque A_0B_0 est immobile alors que le fluide en contact avec la plaque AB a la vitesse V_0 (adhérence aux plaques).
La vitesse V du fluide en un point M passe progressivement de O à V_0

quand z varie de 0 à h.
Si h et V_0 sont assez faibles, les couches fluides parallèles aux plaques glissent les unes sur les autres sans se mélanger (le mouvement est dit laminaire et nous préciserons ultérieurement les conditions pour obtenir un tel écoulement).
On admet alors comme principe la relation suivante :

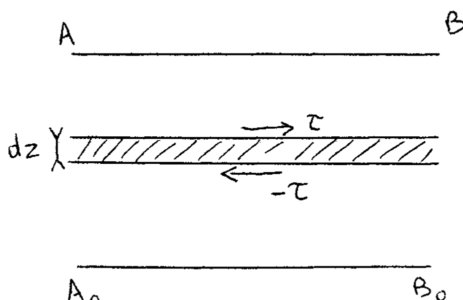
$$\frac{u}{z} = \frac{V_0}{h} = Cte \qquad (I)$$

soit $u = Cte \times z$ ou $du = Cte \times dz$

On a donc, suivant la direction z, un gradient de vitesse constant

$$\frac{du}{dz} = \frac{V_0}{h} = Cte \qquad (I)$$

Considérons une couche infiniment mince de fluide, d'épaisseur dz.



La couche supérieure exerce sur cette couche une contrainte tangentielle $+\tau$ (les vitesses des 2 couches étant différentes, elles subissent des actions de viscosité, actions qui tendent à réduire les différences de vitesse : la couche supérieure tend à entraîner la couche considérée).
La couche inférieure exerce une contrainte $-\tau$. Ainsi la couche est soumise à une force suivant l'axe Ox nul (principe d'inertie : $F = m\gamma$, $\gamma = 0$).
Ainsi la plaque AB exerce sur le fluide au contact une contrainte $+\tau$ alors que le fluide va exercer sur A_0B_0 une contrainte $+\tau$.
La loi de NEWTON (I7I3) indique que τ est proportionnel au gradient de vitesse ; on pose

$$\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dz}} \qquad (2)$$

μ étant le coefficient de viscisité dynamique (coefficient de frottement interne). Ce coefficient dépend de la nature du fluide, de sa température et de sa pression.

Remarques : I) Dans le cas de l'écoulement laminaire, seule existe la contrainte tangentielle de viscosité.

Pour l'écoulement turbulent, au terme $\mu \frac{du}{dz}$ s'ajoute un terme supplémentaire.

2) Unités : La dimension de μ est (relation 2)

$$[\mu] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} \quad \frac{L}{LT^{-I}} = ML^{-I}T^{-I} = \frac{MLT^{-2} x T}{L^2} = \frac{\text{force x temps}}{\text{surface}}$$

Les unités sont :

-système C.G.S. : poise (P_o : g cm^{-I} s^{-I})

-système MKSA : Poiseuille (Pl : N s m^{-2} ou kg $m^{-I}s^{-I}$)

I Pl = IO poises

3) Fluidité :

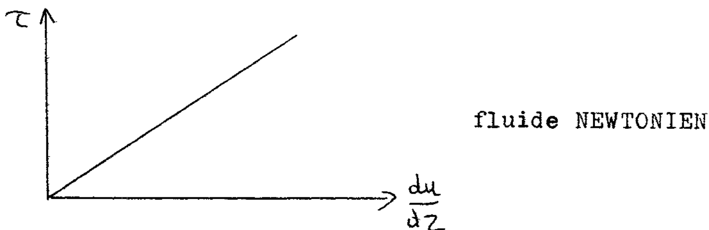
Elle est définie par I/μ

L'unité C.G.S. de fluidité est le rhé.

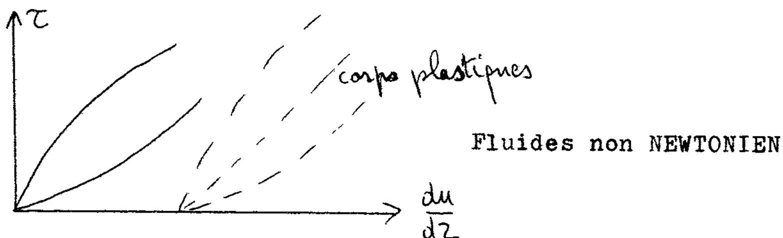
IV-I 2) Fluides NEWTONIENS :

Un fluide est dit NEWTONIEN si le coefficient de viscosité μ ne dépend que de la pression et la température (ne dépend donc pas du gradient de vitesse $\frac{du}{dz}$).

Si μ dépend du gradient de vitesse, le fluide est dit non NEWTONIEN. Dans ce cas, le graphe (τ, $\frac{du}{dz}$) n'est plus une droite.



fluide NEWTONIEN



Fluides non NEWTONIEN

Les liquides purs et les gaz sont NEWTONIENS.
Dans la suite du cours, nous ne considérerons que les fluides NEWTONIENS.

IV-I 3) Coefficient de viscosité cinématique :

Il est défini par $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, ρ étant la masse volumique du fluide.
L'équation aux dimensions donne

$$[\nu] = \frac{L^{-I}MT^{-I}}{ML^{-3}} = L^2T^{-I}$$

D'où les unités :
-système C.G.S. : cm^2s^{-I} ou stokes (St)
-système M.K.S.A. : m^2s^{-I} ou myriastokes : maSt
Elle vaut IO^4 stokes.
Le tableau suivant donne quelques valeurs des coefficients de viscosité dynamique et cinématique de quelques fluides à 20°.

LIQUIDES (20°C)			GAZ (20°C)			
	μ (Pl)	ν (centistokes)		μ (Pl)	ν (centistokes)	C (°K)
Eau	IO^{-3}	I	Air	$I,8\ IO^{-5}$	I5	II4
Alcool éthylique	$I,2\ IO^{-3}$	I,5	CO_2	$I,45\ IO^{-5}$	8,I	277
Benzène	$0,65\ IO^{-3}$	0, 74	Cl_2	$I,35\ IO^{-5}$		
Acétone	$0,35\ IO^{-3}$		H_2	$0,9\ IO^{-5}$	I09	70
Mercure	$I,55\ IO^{-3}$	0,II5	O_2	$I,2\ IO^{-5}$	I5	I38
Glycérine	$800\ IO^{-3}$	635				
Huile de ricin	$I300\ IO^{-3}$					
$Verre_{I400°}$	IO (verre liquide)					
$Verre_{500°}$	IO^{I3}					

Remarque : La viscosité des mélanges n'est pas donnée par la règle d'additivité.

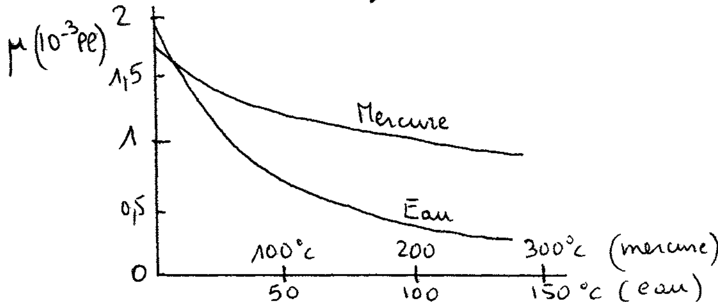
Ex : eau et alcool à 0° C : 64 °/₀ eau et 36 % alcool : $\mu = 7,3\ IO^{-3}$ Pl
($I,8\ IO^{-3}$)($I,8\ IO^{-3}$)

IV-I 4) Influence de la pression et de la température sur le coefficient de viscosité :

I - Cas des liquides :

a) Effet de la température :

La viscosité de tous les liquides décroît quand la température augmente. Aucune loi générale de $\mu = f(t)$ n'a pu être donnée.



On peut représenter la loi de variation par une formule empirique de la forme :

$$\mu_T = \frac{\mu_0}{I+\alpha T+\beta T^2}$$

eau : $\mu_0 = I,8\ IO^{-3}$ Pl

$\alpha = 0,0337$ $\beta = 0,00022$

Une théorie de la viscosité due à ANDRADE donne pour μ une variation du type : $\mu = A\ e^{B/T}$ A et B étant des constantes

(formule d'ANDRADE)

Cette loi est bien vérifiée pour un grand nombre de liquides.

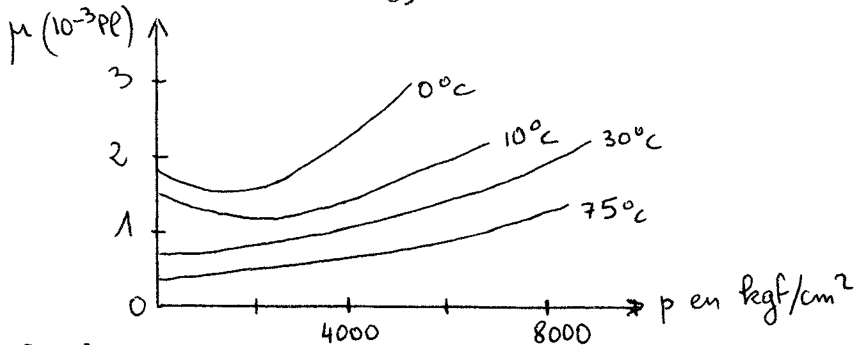
b) Effet de la pression :

La viscosité augmente avec la pression pour tous les liquides mis à part l'eau.

La loi de variation est en général exponentielle :

$$\frac{\mu_p}{\mu_{p_0}} = a^{[(p/p_0)-I]}$$

Dans le cas de l'eau, les variations sont plus complexes :



2 - Cas des gaz :

La théorie cinétique des gaz permet d'expliquer l'existence de la viscosité. Elle nous donne l'expression suivante :

$$\mu = k \rho \bar{c} \bar{l} \qquad (3)$$

k = 0,499

ρ = masse volumique du gaz

$\bar{c}$ = vitesse moyenne des molécules de gaz.

$\bar{l}$ = libre parcours moyen

Le libre parcours moyen $\bar{l}$ est égal à (théorie cinétique des gaz) :

$$\bar{l} = \frac{I}{\pi \sqrt{2}\, \sigma^2\, n}$$

- σ étant le diamètre de la sphère d'action moléculaire (distance à laquelle se trouvent les centres de 2 molécules au moment de leur collision).

- n étant le nombre de molécules par unité de volumes.

La vitesse $\bar{c}$ est égale à :

$$\frac{c^2}{3} = \frac{kT}{m}$$

m = masse d'une molécule

M = masse molaire = N m

ρ = mn

pV = RT

pour I mole V = M/ρ

p/ρ = RT/M

Ainsi le coefficient de viscosité est égal à :

$$\mu = \frac{0{,}II2\ m\ \bar{c}}{\sigma^2} \qquad (4)$$

D'après cette relation, la <u>viscosité d'un gaz</u> est <u>indépendante de la pression et varie comme $\sqrt{T}$</u>.

Pour les gaz réels, on observe que μ varie peu avec p. Dans le domaine des fortes pressions (supérieures à quelques dizaines d'atmosphères), la viscosité augmente avec la pression.

Contrairement aux liquides, la viscosité des gaz augmente avec la

température.
D'après la relation (4), μ est proportionnel à $\sqrt{T}$. En fait SUTHERLAND a établi une relation plus exacte de μ en tenant compte des actions intermoléculaires :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}\,\frac{1+\frac{C}{T_0}}{1+\frac{C}{T}} \qquad (5)$$

C coefficient caractéristique du gaz : Constante de SUTHERLAND (en fait C croît avec la température légèrement).

Exemple : air : 20°C $\mu = 1{,}8\ 10^{-5}$ Pl
100°C $\mu = 2{,}2\ 10^{-5}$ Pl
300°C $\mu = 4{,}4\ 10^{-5}$ Pl

Remarques : 1) la viscosité des gaz est à 0°C de l'ordre de 10^{-5}Pl soit 100 fois plus faible que celles des liquides à 0°C (de l'ordre de 10^{-3}).
2) la viscosité cinématique des gaz est en général supérieure à celle des liquides. Elle augmente naturellement avec la température alors que celle des liquides diminue.
La viscosité cinématique des gaz est inversément proportionnelle à la pression, la masse volumique lui étant proportionnelle.

IV-2 Equations dynamiques des fluides visqueux :

IV-2 1) Relations entre les contraintes et les vitesses de déformations :

Les relations générales entre les contraintes et les vitesses de déformations ont été données par NAVIER en 1823.
Le tenseur des contraintes d'un fluide visqueux peut être déterminé à partir des considérations suivantes.
Dans un fluide parfait, le tenseur est $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$
p étant la pression donnée par l'équation d'état du fluide.
Pour un fluide visqueux, on écrira :

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \qquad (6)$$

σ'_{ij} étant le tenseur "visqueux" des contraintes.

Les processus de frottement interne dans un fluide ne se produisent que dans les régions du fluide où il existe un gradient de vitesse. Ainsi σ'_{ij} doit dépendre des dérivées de la vitesse par rapport aux

coordonnées. Si les gradients de vitesse ne sont pas trop grands, on pourra admettre que les contraintes σ'_{ij} sont des fonctions linéaires des dérivées premières de la vitesse (hypothèse de NAVIER). Il ne doit pas exister de termes indépendants de $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ dans l'expression de σ'_{ij} puisque les contraintes de viscosité σ'_{ij} doivent s'annuler si la vitesse $\vec{v}$ est constante.

Les σ'_{ij} doivent aussi s'annuler lorsque le fluide est soumis à une rotation d'ensemble uniforme, le frottement interne dans le fluide étant alors nul. Si $\vec{\Omega}$ est la vitesse angulaire de rotation uniforme, la vitesse $\vec{v}$ d'une particule est égale à :

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \qquad \vec{r} = \vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \vec{\Omega} \begin{vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix}$$

Les sommes $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ s'annulent si $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$

En effet : $\vec{V} \begin{vmatrix} \Omega_2 z - \Omega_3 y \\ \Omega_3 x - \Omega_1 z \\ \Omega_1 y - \Omega_2 x \end{vmatrix}$ $\qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \text{ et } j$

σ'_{ij} contiendra donc des combinaisons symètriques des termes $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

<u>Remarque</u> : L'hypothèse de NAVIER n'est qu'une approximation, vérifiée par l'expérience pour des vitesses de déformation faibles.

Dans le cas d'un fluide isotrope, le tenseur σ'_{ij} satisfaisant aux conditions précédentes pourra prendre la forme suivante :

$$\boxed{\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \frac{\partial u_e}{\partial x_e} \delta_{ij}} \qquad (7)$$

μ et λ étant des coefficients indépendants de la vitesse qu'on appelle coefficients de NAVIER. μ n'est autre que le coefficient de viscosité dynamique déjà défini et λ le deuxième coefficient de viscosité.

<u>Remarque</u> : La quantité $\frac{\partial u_e}{\partial x_e} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d\sigma}{\sigma\, dt}$ est la vitesse de dilatation cubique $\dot{\theta}$ (σ = volume massique)

$$\dot{\theta} = \frac{\partial u_e}{\partial x_e} = v_{ee}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\sigma'_{ij} = \lambda\dot{\theta}\delta_{ij} + 2\mu\, v_{ij}} \qquad (7')$$

v_{ij} étant la vitesse de déformation (cf. chap. II) :

$$v_{ij} = 1/2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

La contrainte totale σ_{ij} est égale à :

$$\boxed{\sigma_{ij} = (\lambda\dot{\theta} - p)\delta_{ij} + 2\mu\, v_{ij}} \qquad (8)$$

ou

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -p + \lambda\dot{\theta} + 2\mu v_{11} \\ \sigma_{22} = -p + \lambda\dot{\theta} + 2\mu v_{22} \\ \sigma_{33} = -p + \lambda\dot{\theta} + 2\mu v_{33} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{12} = 2\mu v_{12} \\ \sigma_{13} = 2\mu v_{13} \\ \sigma_{23} = 2\mu v_{23} \end{cases}$$

La force $\vec{P}$ qui agit sur une unité d'aire de surface, $\vec{n}$ étant le vecteur unité normale à cette surface, a pour composantes :

$$P_i = +\sigma_{ij}\, n_j = (-p + \lambda\dot{\theta})\, n_i + 2\mu v_{ij}\, n_j$$

Le terme $-pn_i$ représente la pression usuelle du fluide.
Les autres termes représentent la force de viscosité agissant sur la surface.
La composante suivant la normale à la surface ou pression est modifiée :

$$P_i\, n_i = (-p + \lambda\dot{\theta}) + 2\mu v_{ij}\, n_i\, n_j$$

IV-2 2) <u>Equations de NAVIER-STOKES</u> :

Reprenons les équations dynamiques (voir cours 3GP et chap. I Mécanique des fluides)

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho\frac{du_i}{dt}$$

Remplaçons σ_{ij} par l'expression (8)

On a :

$$\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\dot{\theta} - p) = \lambda\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$2\mu\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} = \mu\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}_{\sum_j} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}}_{\sum_j}\Big)$$

$$2\, v_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Les coefficients λ et μ étant considérés comme constants (dans la plupart des cas, leur variation dans le fluide est très faible).

Or on a :

$$\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \Delta u_i$$

$$\sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x_i} \qquad \dot{\theta} = \mathrm{div}\, \vec{V} = \frac{\partial u_e}{\partial x_e}$$

On obtient ainsi les équations de NAVIER et POISSON :

$$\frac{I}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = X_i + \frac{\lambda+\mu}{\rho} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u_i - \frac{du_i}{dt} \qquad (9)$$

$$\frac{I}{\rho} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \vec{X} + \frac{\lambda+\mu}{\rho} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div}\, \vec{V} + \nu \Delta \vec{V} - \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (9')$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, div $\vec{V}=0$.

L'équation du mouvement d'un fluide visqueux incompressible s'écrit (équations de NAVIER-STOKES) :

$$\boxed{\frac{I}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = X_i + \nu \Delta u_i - \frac{du_i}{dt}} \qquad (IO)$$

On peut expliciter $\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

($\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$ pour un mouvement permanent)

sous forme vectorielle :

$$\boxed{-\frac{I}{\rho} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p + \vec{F} + \nu \Delta \vec{V} = \frac{d\vec{V}}{dt}} \qquad (IO')$$

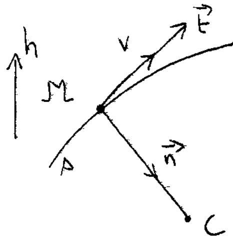
forces de pression volume viscosité

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \frac{dw}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Si $\mu = 0$, les équations de NAVIER-STOKES se réduisent aux équations d'EULER.

Equations intrinsèques :

On peut rapporter les équations dynamiques du mouvement à des axes liés à la trajectoire d'une particule.



axe Ox est la tangente $\vec{t}$ à la trajectoire de la particule M.

axe Oy est la normale principale $\vec{n}$ dirigée vers le centre de courbure C.

On considérera un écoulement permanent donc $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

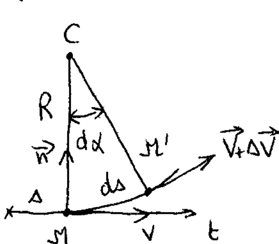
Dans le cas d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur, on a : ρ = Cte et $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, gh$

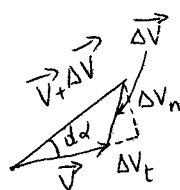
Les équations de NAVIER-STOKES s'écrivent alors :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho\, \overrightarrow{grad}\, gh - \overrightarrow{grad}\, p + \mu \Delta \vec{V} = -\overrightarrow{grad}\,(p+\rho gh) + \mu \Delta \vec{V}$$

Projetons cette égalité vectorielle suivant la tangente $\vec{t}$ et la normale $\vec{n}$. Les composantes de $\frac{d\vec{V}}{dt}$ sont respectivement :

$$\begin{cases} \gamma_t = \dfrac{dV_t}{dt} = \dfrac{\partial V_t}{\partial t} + \dfrac{\partial V_t}{\partial S}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\partial V_t}{\partial t} + V_t \dfrac{\partial V_t}{\partial S} \\ \gamma_n = \dfrac{dV_n}{dt} = \dfrac{\partial V_n}{\partial t} + \dfrac{\partial V_n}{\partial S}\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{\partial V_n}{\partial t} + V_t \dfrac{\partial V_n}{\partial S} \end{cases}$$





On a $R\, d\alpha = ds$

$$d\alpha = \frac{dV_n}{V_S}$$

Soit

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dV_n}$$

$$V_S = \frac{V_S}{\dfrac{\partial V_n}{\partial S}}$$

$$\text{d'où } \gamma_n = \frac{dV_n}{dt} = \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V_S^2}{R}$$

Pour un écoulement permanent, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, d'où :

$$\text{(II)} \begin{cases} \gamma_t = V \dfrac{\partial V}{\partial s} = \dfrac{dV}{dt} \\ \gamma_n = \dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$

(V_t et V sont identiques)

Ainsi pour un écoulement permanent, l'équation de NAVIER-STOKES s'écrit :

$$\begin{cases} \rho \frac{dV}{dt} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = - \frac{\partial}{\partial s}(p+\rho gh) + (\mu \Delta \vec{V})_t \\ \rho \frac{V^2}{R} = - \frac{\partial}{\partial n} (p+\rho gh) + (\mu \Delta \vec{V})_n \end{cases}$$

Multiplions les 2membres de la première équation par $ds = V\,dt$

$$\rho V\,dV = - d(p+\rho gh) + (\mu \Delta \vec{V})_t ds$$

en restant sur la trajectoire

soit

$$\rho d(\frac{V^2}{2}) = - d(p+\rho gh) - d\tau$$

$d\tau$ étant le travail fourni suivant la trajectoire par les forces de frottement (par unité de volume de fluide).

On peut encore écrire :

$$\boxed{d(\frac{\rho V^2}{2} + p + \rho gh) = - d\tau} \qquad (I2)$$

$d\tau$ est un travail mécanique perdu par le fluide (travail transformé en chaleur par frottement visqueux).

Si $d\tau = 0$ ($\mu = 0$), on retrouve l'équation de BERNOULLI du fluide parfait incompressible :

$$\frac{\rho V^2}{2} + p + \rho gh = Cte$$

le long de la trajectoire.

Remarque : cas des trajectoires rectilignes parallèles : Dans ce cas, la composante $(\mu \Delta \vec{V})_n$ est nulle. Comme R est ∞,

$$\frac{\partial}{\partial n}(p + \rho gh) = 0 \qquad \text{soit} \quad p + \rho gh = Cte \quad (I3)$$

Dans un plan perpendiculaire aux trajectoires, la répartition des pressions est hydrostatique, comme pour un fluide parfait.

Aux équations de NAVIER-STOKES, il faut ajouter l'équation de continuité (équation lI-3), l'équation d'Etat du fluide et le principe de la conservation de l'énergie, soit au total 6 équations pour déterminer 6 inconnues u, v, w, p, ρ, T.

Condition aux limites : On admet d'après l'expérience que les éléments fluides au contact d'un solide adhèrent au solide sans glisser. Le long de la paroi, la vitesse du fluide est identique à celle de

la paroi. De ce fait, la limite du mouvement d'un fluide visqueux dont le coefficient de viscosité tend vers 0 n'est pas en général un mouvement sans discontinuité de fluide parfait.

Remarque : Les équations de NAVIER-STOKES ne sont pas linéaires et de ce fait n'ont pu être intégrées que dans des cas particuliers.

IV-2 3) Dissipation d'énergie dans un fluide incompressible :

La viscosité entraîne une dissipation d'énergie qui est transformée en chaleur. Considérons le cas d'un fluide incompressible.

Le travail de déformation (réel) par unité de masse est égale à :

$$\frac{I}{\rho}\sigma_{ij}v_{ij}\,dt = \frac{I}{\rho}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = -\frac{p}{\rho}v_{ii}dt + \frac{I}{\rho}\sigma'_{ij}v_{ij}\,dt$$

$$= -\frac{p}{\rho}\dot{\theta}dt + \frac{I}{\rho}\sigma'_{ij}\,v_{ij}\,dt \qquad (I4)$$

D'après le premier principe de thermodynamique (principe de conservation de l'énergie), on a la relation suivante :

$$dW + dQ = dU + dC \qquad (I5)$$

U étant l'énergie interne du système

C énergie cinétique

dW travail reçu par le système (travail des forces extérieures)

dQ quantité de chaleur reçue par le système

La chaleur reçue par le système dQ est égale à (second principe)

$$dQ = T\,dS - df \qquad (I6)$$

avec $df \geqslant 0$ ou $dQ \leqslant TdS$

$df = 0$ pour une transformation réversible : $dQ = TdS$

$df > 0$ correspond aux transformations irréversibles (irréversibilités mécaniques, physiques ou chimiques). Les irréversibilités mécaniques intérieures sont les frottements intérieurs ou viscosité.

Le travail réel des forces d'inertie est égal à $-dC$, le travail de déformation est donc égal à $dW - dC = dU - dQ$

D'après le 2ème principe, $dW_{def} = dW - dC = dU - T\,dS + df$

$$\boxed{dW_{def} = dU - T\,dS + df} \qquad (I7)$$

Pour un fluide à l'équilibre, $dU - TdS = - p\, d\sigma$ (transf. réversible)
Le Ier terme de la relation (I4) qui est égal à $-\frac{p}{\rho}\frac{d\sigma}{\sigma} = -p\, d\sigma$ (σ = volumique massique) correspond donc à des vitesses de déformation infiniment petites. Dans ce cas, la transformation est réversible et $df = 0$. Le Ier terme représente donc $dU - T\,dS$ alors que le second terme représente le travail dissipé df. On a donc :

$$\boxed{\rho\, df = \sigma'_{ij} v_{ij} dt = \phi\, dt} \qquad (I8)$$

ϕ est appelée fonction de dissipation.

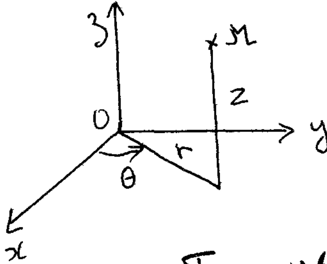
$$\boxed{\phi = \sigma'_{ij} v_{ij} = \lambda \dot{\theta}^2 + 2\mu \sum_{ij} v_{ij}^2} \qquad (I9)$$

$$\Phi = \lambda \dot{\theta}^2 + 2\mu (v_{II}^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2 + 2v_{23}^2 + 2v_{3I}^2 + 2\, v_{I2}^2) \qquad (I9')$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, $\dot{\theta} = 0$, donc seul intervient le coefficient μ. Le travail de déformation se réduit alors à df. La fonction ϕ étant positive, on conclut que le coefficient de viscosité μ est toujours positif.

ANNEXE : Expression des composantes du tenseur des contraintes et de l'équation de NAVIER-STOKES en coordonnées cylindriques et sphériques.

I) Coordonnées cylindriques : r, θ, z



Composantes du tenseur des contraintes

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(I/r \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{I}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{I}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)$$

$$\sigma_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{I}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

L'équation de NAVIER-STOKES (on néglige les forces de volume)

$$① \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{I}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{I}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right)$$

$$② \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{I}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{I}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{I}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right)$$

$$③ \frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{I}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{I}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

2) Coordonnées sphèriques : r, φ, θ

$$\sigma_{rr} = -p+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p+2\mu\left(\frac{I}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta \operatorname{cotg}\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p+2\mu\left(\frac{I}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{I}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \mu\left(\frac{I}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}+\frac{I}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}-\frac{u_\varphi \operatorname{cotg}\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{\varphi r} = \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{I}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\right)$$

Equations de continuité :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{I}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{I}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{2u_r}{r}+\frac{u_\theta \operatorname{cotg}\theta}{r} = 0$$

Equations de NAVIER-STOKES :

① $$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{r}=$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cot g\theta}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{2u_r}{r^2}-\frac{2\cot g}{r^2}u_\theta\right]$$

② $$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}+\frac{u_r u_\theta}{r}-\frac{u_\varphi^2\cot g\theta}{r}=$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cot g\theta}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right]$$

③ $$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}+\frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r u_\varphi}{r}+\frac{u_\theta u_\varphi\cot g\theta}{r}=$$

$$-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru_\varphi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cot g\theta}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right]$$

C H A P I T R E V

V ECOULEMENTS LAMINAIRES ET TURBULENTS

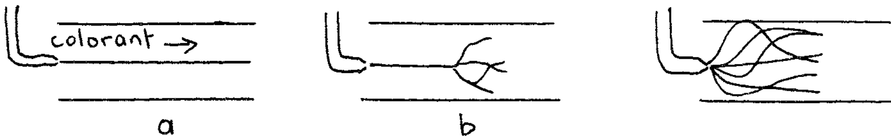
Introduction : Nombre de REYNOLDS :

Il existe divers régimes d'écoulement d'un fluide visqueux. L'expérience de REYNOLDS permet de mettre en évidence ces régimes. En introduisant un colorant dans l'axe du tube où circule un courant d'eau, on peut observer les phénomènes suivants :

-a- pour de faibles vitesses de courant d'eau, le filet de colorant traverse tout le tube en se maintenant dans l'axe.

-b- pour des vitesses plus élevées, après avoir accompli un parcours plus ou moins long, le colorant se mélange brusquement à l'eau.

-c- pour de grandes vitesses, le filet se mélange immédiatement à l'eau.



Dans le premier cas, l'écoulement est dit laminaire (ou de POISEUILLE) : les filets fluides glissent les uns sur les autres sans se mélanger. Dans le troisième cas, le liquide est animé de mouvements tourbillonnaires qui produisent un brassage de toute la masse. C'est le régime turbulent (ou hydraulique).

Le deuxième cas correspond à un régime de transition. REYNOLDS étudia le premier ces types d'écoulement en faisant varier le diamètre de la conduite, la température etc... et montra que le paramètre permettant de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimensions appelé nombre de REYNOLDS défini par :

$$\mathcal{R} = \frac{Dv\rho}{\mu} \qquad (I)$$

D = diamètre de la conduite, v = vitesse, ρ = masse volumique et μ

la viscosité dynamique du fluide.

On admet en général que si :

$\mathcal{R} < 2000$ le régime est laminaire

$\mathcal{R} > 5000$ le régime est turbulent

Ces valeurs limites ne sont d'ailleurs pas très bien définies et il faut les considérer comme ordre de grandeur.

On peut donner une signification physique au nombre de REYNOLDS en exprimant le rapport des forces de viscosité et des forces d'inertie.

La force d'inertie par unité de masse est :

$$I x \frac{dV}{dt} = \frac{V}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{VdV}{dx}$$

La force de viscosité (voir équations de NAVIER-STOKES (IO)) est proportionnelle à $\frac{\mu}{\rho} \frac{d^2V}{dx^2}$

Le rapport de ces deux forces est :

$$\frac{VdV}{dx} x \frac{I}{\frac{\mu}{\rho_2} \frac{d^2V}{dx^2}}$$

$\frac{VdV}{dx}$ a la dimension de $\frac{V^2}{L}$

$\frac{\mu}{\rho} \frac{d^2V}{dx^2}$ a la dimension de $\frac{\mu}{\rho} \frac{V}{L^2}$

Le rapport de ces deux grandeurs est un nombre sans dimensions formés par le produit $\frac{VL\rho}{\mu}$ analogue au nombre de REYNOLDS.

Le nombre de REYNOLDS est donc une mesure de l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité.

Du point de vue pratique, il est bon d'avoir des ordres de grandeur des différents termes qui interviennent dans la définition du nombre de REYNOLDS :

Prenons par exemple le cas de l'eau à 20°C :

$$\rho = IO^3 \text{ kg/m}^3 \text{ , } \mu = IO^{-3} \text{Pl}$$

Le régime sera laminaire pour $\mathcal{R} < 2000$ soit $Dv < 2\ IO^{-3}\ m^2/s$

Pour un diamètre de conduite D de O,Im, on doit avoir

$$v \leqslant 2\ I\bar{O}^2 \text{ m/s}$$

Industriellement, les vitesses d'écoulements des fluides sont de l'ordre du m/s de sorte que les écoulements sont turbulents. Seuls les fluides très visqueux ~~éléments~~ auront un écoulement laminaire. Par contre pour des tubes capillaires ($D = 10^{-4}$m), les régimes seront en général laminaires ($v \leqslant 20$ m/s).

V-I <u>Ecoulements laminaires</u> :

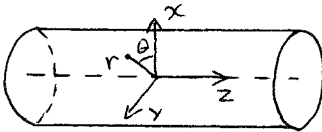
Lorsque les forces d'inertie sont nulles ou négligeables devant les forces de viscosité c'est à dire lorsque le nombre de REYNOLDS est faible, on peut alors trouver des solutions simples des équations de NAVIER-STOKES dans le cas d'écoulements permanents de fluides incompressibles. Ces écoulements sont appelés laminaires.

De faibles nombres de REYNOLDS sont observés dans les cas particuliers suivant :

- fluide de grande viscosité cinématique
- vitesses d'écoulement faibles
- mouvement de fluide de dimensions réduites

V-I I) <u>Ecoulement de POISEUILLE</u> :

Il s'agit de l'écoulement laminaire d'un liquide visqueux dans un tube cylindrique de diamètre D. Nous considérerons le cas d'un écoulement permanent d'un fluide incompressible.



Nous négligerons d'abord la pesanteur. Les trajectoires sont parallèles à l'axe du tube Oz.

Les composantes de la vitesse $\vec{V}$ sont donc égales à :

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w \neq 0 \end{cases}$$

L'équation de continuité (éq.II 6) se réduit alors à :

$$\text{div}\,\vec{V} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Par conséquent, w ne dépend que de x et y. Par raison de symètrie, w ne dépend que de la distance r à l'axe du tube. Il est donc plus commode d'utiliser les coordonnées cylindriques (r,θ,z).

Les équations de NAVIER-STOKES se réduisent aux équations (voir

Annexe chap. III)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w = 0 \end{cases}$$

Des deux premières équations, on en déduit que p est indépendant de r et de θ et ne dépend donc que de z : $p = p(z)$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$$

w n'est fonction que de r

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)$$

Soit $\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = k$

La pression p ne dépendant que de z et w n'étant fonction que de r, la relation précedente ne peut être vérifiée que si chaque membre est égal à une constante k.

Intégrons cette relation.

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = + \frac{kr}{\mu} \qquad r\frac{dw}{dr} = \frac{kr^2}{2\mu} + a$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{kr}{2\mu} + \frac{a}{r} \qquad w = \frac{kr^2}{4\mu} + a \, \mathrm{Log} r + b$$

a et b sont des constantes d'intégration qui peuvent être déterminées par les conditions aux limites.

La vitesse ne peut être infinie sur l'axe (r=0) donc a = 0 et en outre, la vitesse s'annule sur les parois du tube (le fluide adhère aux parois) : w=0 pour $r = r_o = \frac{D}{2}$, d'où

$$b = -\frac{kr_o^2}{4\mu}$$

Finalement, on obtient pour w l'expression suivante :

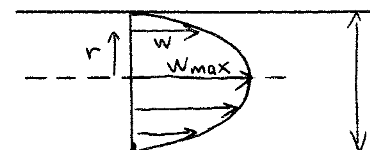
$$\boxed{w = -\frac{k}{4\mu}(r_o^2 - r^2)} \qquad (2) \qquad k < 0$$

La vitesse est maximale sur l'axe du tube (r=0) :

$$w_{max} = -\frac{kr_o^2}{4\mu}$$

$$w = w_{max}\left(I - \frac{r^2}{r_o^2}\right) \qquad (2')$$

La loi de distribution des vitesses suivant un diamètre est parabolique (suivant la section, il s'agit d'un paraboloïde de révolution ayant son sommet sur l'axe du tube).



Remarque : Les calculs précédents restent valables si on tient compte de la pesanteur, à condition de remplacer la pression p par la pression étoilée $p^* = p + \rho gh$

On peut calculer le débit en volume du tube cylindrique. On a

$$q_v = \int_S \vec{V}\, \vec{dS} = \int_0^{r_o} w\, 2\pi\, r dr = -\frac{k\pi}{2\mu}\int_0^{r_o} r(r_o^2 - r^2)\, dr$$

$$q_v = -\frac{k\pi}{2\mu}\left(\frac{r_o^4}{2} - \frac{r_o^4}{4}\right) = \boxed{-\frac{k\pi r_o^4}{8\mu} = q_v} \qquad (3)$$

$$q_v = w_{max}\frac{\pi r_o^2}{2}$$

La vitesse moyenne est la vitesse qu'auraient tous les filets fluides avec le même débit. Elle est donc définie par

$$\bar{w} = \frac{q_v}{S} = \frac{q_v}{\pi r_o^2} = \frac{w_{max}}{2} \qquad (4)$$

<u>Perte de charge dans un tube cylindrique</u> :

Nous avons vu que $\frac{dp}{dz} = k \qquad k < 0$

soit $p = kz + c$, c constante d'intégration

La pression décroît donc linéairement le long du tube, cette pression étant constante dans une section.

$$k = \frac{dp}{dz} = -\frac{p_I - p_2}{L} = -\frac{\Delta p}{L} \qquad (5)$$

L étant la longueur du tube et $p_I - p_2 = \Delta p$ la différence de pression entre les sections d'entrée et de sortie.

Le débit volumique exprimé en fonction de Δp s'écrit :

$$\boxed{q_v = \frac{\pi r_o^4}{8\mu L}\Delta p} \qquad (6)$$

C'est la loi de HAGEN (I839) et POISEUILLE (I840).

La chute de pression linéaire s'écrit donc d'après les relations (4) et (6) :

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\mu q_v}{\pi r_o^4} = \frac{8\mu \bar{w}}{r_o^2}$$

La perte de charge linéaire d'un écoulement laminaire est par conséquent égale à : $J = \frac{p_I - p_2}{\rho g L}$ (nbre sans dimensions)

[La charge totale est égale à $h_T = h + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$

Par conséquent, si h et V sont constants, la perte de charge le long du tube cylindrique est due à la variation de la pression.]

$$J = \frac{32\mu \bar{w}}{\rho g D^2} \qquad (7)$$

En mettant en évidence l'énergie cinétique de l'unité de poids correspondant à la vitesse de débit $\bar{w}$ et le diamètre D de la conduite, on peut écrire

$$J = \Psi \frac{\bar{w}^2}{2g} \frac{1}{D} \qquad (8)$$

Ψ étant un coefficient sans dimensions appelé <u>coefficient de perte de charge linéaire</u>.

Dans le cas de l'écoulement de POISEUILLE :

$$\boxed{\Psi = \frac{64\mu}{\rho \bar{w} D} = \frac{64}{\mathcal{R}}} \qquad (9)$$

$\mathcal{R} = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu}$ étant le nombre de REYNOLDS de l'écoulement

Pour calculer la perte de charge d'un écoulement laminaire le long d'un tube cylindrique de diamètre D, il faut connaître $\bar{w}$ ou le débit et $\frac{\mu}{\rho}$ (c'est à dire la température et la pression).

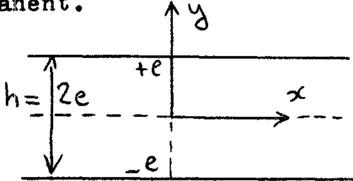
<u>Frottement sur la paroi</u> :

Le tenseur des contraintes (cf. annexe chap. IV) en coordonnées cylindriques n'a qu'une seule composante :

$$\sigma_{zr} = \tau = \mu \frac{\partial w}{\partial r}$$

V-I 2) Ecoulement entre deux plaques planes parallèles :

Considérons deux plaques planes et parallèles (immobiles), à la distance $h = 2e$ l'une de l'autre, d'envergure infinie et au repos. Nous considérerons une longueur unité. L'écoulement est permanent.



L'équation de continuité (u est la seule composante de la vitesse) conduit à la relation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ u ne dépend que de y et z.

Par raison de symètrie, u ne dépend pas de z donc u n'est fonction que de y.

L'équation de NAVIER-STOKES se réduit à :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{du}{dt} = - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u = 0 \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Ainsi la pression p ne dépend que de x et on a l'équation suivante

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}} \qquad (13)$$

Par analogie avec le cas précédent, $\frac{dp}{dx} = k = Cte$

En intégrant
$$u = \frac{k}{\mu} \frac{y^2}{2} + ay + b$$

a et b étant des constantes d'intégration

La vitesse est nulle pour $y = e$ et $y = -e$: par conséquent $a=0$.

La condition $u=0$ pour $y = e$ permet de déterminer b :

$$\frac{k}{\mu} \frac{e^2}{2} + b = 0 \qquad \text{soit} \qquad b = - \frac{k}{\mu} \frac{e^2}{2}$$

La loi de distribution des vitesses est de la forme :

$$u = \frac{k}{2\mu} (y^2-e^2) \qquad k<0 \qquad (14)$$

Cette loi est encore parabolique.

La vitesse est maximale au centre :

$$u_{max} = - \frac{ke^2}{2\mu} = \frac{\Delta p}{L} \frac{e^2}{2\mu} \qquad \Delta p = p_I - p_2$$

Le débit en volume est donné par l'intégrale :

$$q_v = \int_{-e}^{+e} \frac{\Delta p}{L} \frac{I}{2\mu} (y^2 - e^2)\, dy = \frac{2}{3} \frac{\Delta p}{L} \frac{e^3}{\mu}$$

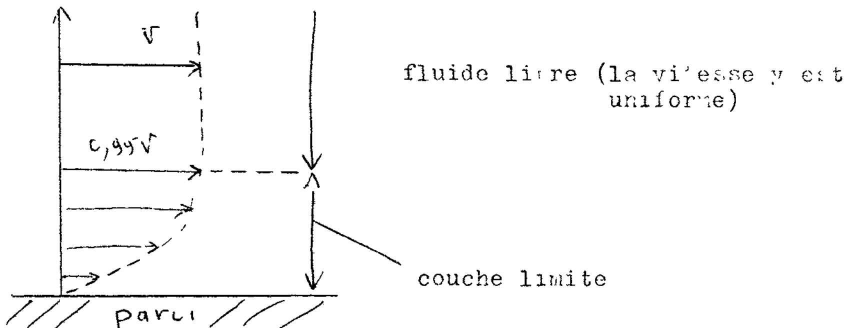
La vitesse moyenne $\overline{u} = \frac{2}{3} u_{max} = \frac{q_v}{2e}$

Les calculs de perte de charge et de frottement se font de la même façon que précédemment.

Remarque : L'une des parois peut être en mouvement uniforme. Les conditions aux limites sont alors modifiées et on a alors l'écoulement de COUETTE généralisé.

V-I 3) Notion de couche limite :

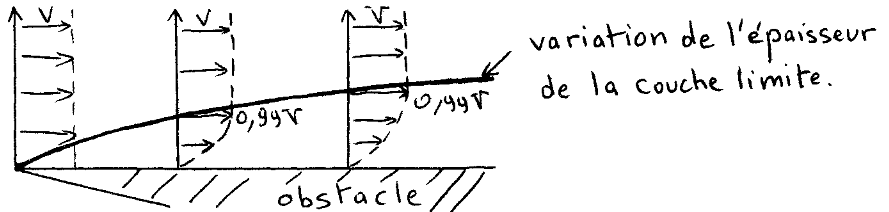
Si on considère une couche de particules très petites en contact avec une paroi (qui présente toujours des aspérités), on peut admettre une adhérence complète : la vitesse d'écoulement est donc nulle pour la couche de fluide en contact avec la paroi.
Quand on s'éloigne de la paroi, la vitesse d'écoulement croît de zéro jusqu'à une certaine valeur V qui est la vitesse d'écoulement au loin de la paroi. Cet accroissement est d'abord rapide puis de plus en plus lent.



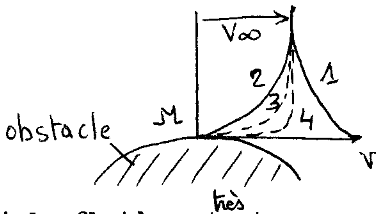
La couche de fluide en contact avec la paroi pour laquelle la vitesse passe de 0 à 0,99 V est appelée couche limite dynamique. Au-delà de la couche limite, la vitesse est pratiquement constante :

c'est la zone de fluide libre où les effets de viscosité sont très faibles.

En général, la couche limite dynamique s'accroît dans le sens de l'écoulement et à partir de l'extrémité amont de la paroi, à cause de la transmission progressive des effets de freinage de la paroi.



<u>Effet de la viscosité</u> : Considérons l'écoulement d'un fluide de viscosité variable autour d'un obstacle fixe.



Si le fluide est parfait, le profil des vitesses le long d'une normale en M à la paroi est donné par la courbe I, la valeur V_∞ étant celle qui règne loin de l'obstacle.

Si le fluide est très visqueux et le mouvement très lent (très faible nombre de REYNOLDS), le profil des vitesses est indiqué par la courbe 2 (il y a adhérence à la paroi).

La réalité se situe entre les deux extrêmes (courbe 3 pour les faibles valeurs de $\mathcal{R}_e$, courbe 4 pour les fortes valeurs).

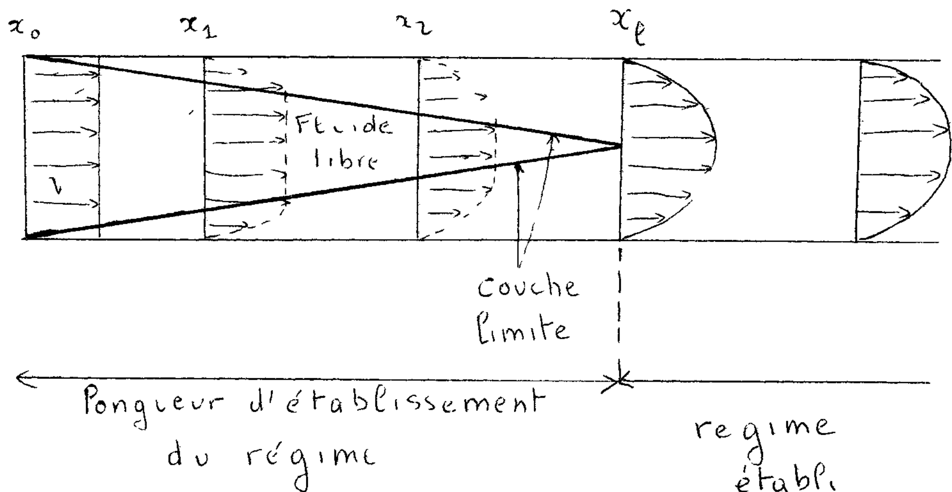
<u>Cas d'un écoulement permanent dans une conduite cylindrique</u> :

Considérons un fluide pénétrant dans une conduite cylindrique avec une vitesse uniforme $\vec{V}$.

Quand le fluide s'écoule dans la canalisation, l'effet de la paroi se manifeste : la couche limite s'épaissit jusqu'à atteindre le centre de la canalisation à l'abscisse x_e.

A partir de l'abscisse x_ℓ, la zone de fluide libre est réduite à néant : le profil des vitesses a alors une allure parabolique si l'écoulement est assez lent (écoulement laminaire) ou plus aplatie si l'écoulement est turbulent.

A partir de x_ℓ, le profil des vitesses n'évolue pas : le régime est <u>établi</u>. Cette longueur x_ℓ dépend du nombre de REYNOLDS. Pour les écoulements industriels (turbulents), x_ℓ est de l'ordre de grandeur de plusieurs dizaines de diamètres.

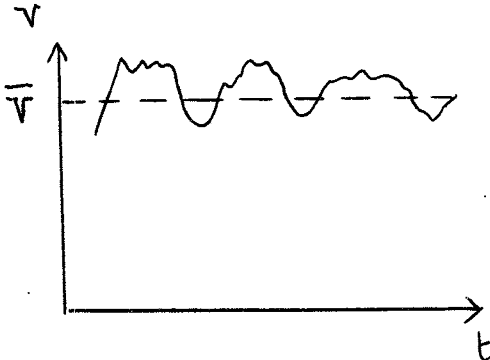


V.2.- ECOULEMENTS TURBULENTS

La plupart des écoulements rencontrés industriellement étant turbulents, il est donc important du point de vue technique d'étudier ce type d'écoulement.

V.2.1.- CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT TURBULENT

Dans un écoulement turbulent, la vitesse d'"écoulement en un point M subit des fluctuations continuelles de petite amplitude en direction et en intensité autour d'une valeur moyenne indépendante du temps(si les conditions aux limites sont constantes, on a donc un écoulement permanent en moyenne)



Remarque : dans le cas de l'écoulement laminaire, l'écoulement est rigoureusement permanent (les fluctuations sont indécelables à la précision des mesures près).

a) Définitions: On appelle fluctuation u' de u(t), la variable égale à la différence entre chaque valeur individuelle et la moyenne

$$u' = u(t) - \overline{u} \qquad (15)$$

La variance est la moyenne du carré de la fluctuation u' et l'écart type la racine carrée $\sigma(u)$ de la variance :

$$\sigma^2(u) = \overline{u'^2} = \overline{\left[u(t) - \overline{u}\right]^2}$$

La covariance de deux variables u et v est la moyenne du produit de leurs fluctuations:

$$\overline{u' v'}$$

- La moyenne d'une fluctuation est nulle. En effet, la moyenne de la vitesse prise entre les temps t_1 et $t_2 = t_1 + T$ est égale à :

$$\overline{u} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, dt = \overline{u}\,(T, t_1) \qquad (16)$$

Il existe une durée seuil de la médiation T telle que la moyenne $\overline{u}$ soit constante, quel` que soit t_1

$$T > t_s$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\overline{u} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u\, dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} (\overline{u} + u')\, dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \overline{u}\, dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u'\, dt$$

soit $\overline{u} = \overline{u} + \overline{u'}$

$$\text{d'où} \quad \overline{u'} = 0 \qquad (17)$$

- La moyenne d'un produit diffère en général du produit des moyennes :

$$\overline{u\, v} \neq \overline{u}\, \overline{v}$$

en effet $\overline{u\, v} = \overline{(\overline{u} + u')\, (\overline{v} + v')} = \overline{\overline{u}\, \overline{v} + u'\, \overline{v} + \overline{u}\, v' + u'\, v'}$

La moyenne d'une somme est égale à la somme des moyenne et la moyenne du produit d'une constante par une variable est égale au produit de cette constante par la moyenne de la variable.

On a donc : $\overline{\bar{u}\,\bar{v}} = \bar{u}\,\bar{v}$ $\overline{u'\bar{v}} = \bar{v}\,\bar{u'} = 0$

$$\overline{\bar{u}\,\bar{v'}} = \bar{u}\;\;\bar{v'} = 0$$

soit $$\overline{u\,v} = u\,\bar{v} + \overline{u'\;v'} \qquad (18)$$

Si on égale v à u, on obtient

$$\overline{u^2} = \bar{u}^{\,2} + \overline{u'^2}$$

soit $$\overline{u'^2} = \sigma^2(u) = \overline{u^2} - \bar{u}^2 \qquad (19)$$

• La moyenne de la dérivée partielle est égale à la dérivée de la moyenne

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \qquad (20)$$

En effet : $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} u\;dt\right) = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dt$$

t_1 et t_2 étant indépendant de x.

• La moyenne de la dérivée d'une variable par rapport au temps sera supposée nulle.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\,dt = \frac{1}{T}\left[u(t_2) - u\;(t_1)\right]$$

La différence $u(t_2) - u(t_1)$ est faible et si T est assez grand,

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} \simeq 0 \qquad (21)$$

b - Contraintes dans le cas d'écoulements turbulents

Nous ne considérerons que le cas des fluides incompressibles dont le mouvement moyen est permanent.

Nous allons déterminer le tenseur des contraintes dans le cas d'un écoulement turbulent à partir du tenseur établi au chapitre IV (relation IV.8).

Aux contraintes moyennes en un point M, il faudra ajouter des termes supplémentaires dus aux fluctuations.

Nous allons montrer que le tenseur des contraintes a la forme suivante :

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_{11}^{T} = -\bar{p} + 2\,\mu\,\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho\,\overline{u'^{2}} \\[2ex] \sigma_{22}^{T} = -\bar{p} + 2\,\mu\,\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho\,\overline{v'^{2}} \\[2ex] \sigma_{33}^{T} = -\bar{p} + 2\,\mu\,\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \rho\,\overline{w'^{2}} \\[2ex] \sigma_{12}^{T} = \mu\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) - \rho\,\overline{u'v'} \\[2ex] \sigma_{23}^{T} = \mu\left(\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)\rho\,\overline{v'\;w'} \\[2ex] \sigma_{13}^{T} = \mu\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - \rho\,\overline{u'w'} \end{cases}$$

ou sous forme tensorielle

$$\boxed{\sigma_{ij} = - p\ \delta_{ij} + 2\mu\ v_{ij} - \rho\ u'_i\ u'_j} \qquad (22)$$

$$2v_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{: vitesse de déformation}$$

Du point de vue dynamique, un écoulement turbulent se comporte comme un écoulement permanent ordinaire en imaginant un mouvement fictif qui a les caractéristiques moyennes de l'écoulement $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, à condition d'ajouter aux contraintes moyennes des termes supplémentaires dus aux fluctuations de la forme $\rho\ \overline{u'_i\ u'_j}$

Etablissons maintenant les relations (22). Les composantes de l'accélération dans le cas d'un fluide incompressible s'écrivent de la façon suivante :

$$\gamma_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

l'équation de continuité s'écrit : div $\vec{V} = 0$ soit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

On peut donc écrire $\gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}$

soit par exemple :

$$\gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial x}$$

Le mouvement moyen étant permanent, on peut écrire :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial_2} = 0$$

et $$\bar{\gamma}_i = \frac{\overline{\partial u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \quad \text{d'après la relation (20)}$$

mais $$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \, \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} \quad \text{d'après (18)}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \, \bar{u}_j}{\partial x_j} = \Gamma_i \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\bar{\gamma}_i = \frac{\partial \bar{u}_i \, \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}} \tag{23}$$

ainsi $$\bar{\gamma}_x = \overbrace{\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\,\bar{w}}{\partial z}}^{\Gamma_x} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

Le 1er terme $\frac{\partial u_i \, u_j}{\partial x_j}$ représente la composante Γ_x de l'accélération du mouvement moyen (d'après les relations précédentes).

Examinons maintenant les équations dynamiques d'un fluide visqueux

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \frac{du_i}{dt} = \rho \gamma_i$$

Prenons les moyennes dans le temps : on obtient :

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} + \rho \bar{X}_i = \rho \bar{\gamma}_i = \rho \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}}_{\Gamma_i} + \rho \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$$

ou $$\rho \Gamma_i = \rho \bar{X}_i + \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante (identique à celle d'un fluide visqueux).

$$\rho \Gamma_i = \rho \overline{X}_i - \frac{\partial \sigma^T_{ij}}{\partial x_j} \qquad (24)$$

équations dynamiques du mouvement moyen d'un fluide visqueux turbulent

avec

$$\sigma^T_{ij} = \overline{\sigma_{ij}} - \rho\, \overline{u'_i u_j} \qquad (22)$$

$$\overline{\sigma_{ij}} = -\overline{p}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \overline{V_{ij}}$$

$$= -\overline{p}\, \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

On retrouve bien l'expression (22) que nous avons donné au début du paragraphe. Les équations dynamiques du mouvement moyen d'un fluide visqueux turbulent incompressible s'écrivent (voir paragraphe IV.2.2.)

$$\Gamma_i = \overline{X}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\, \Delta \overline{u}_i - \left(\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}\right) \qquad (25)$$

$$\Gamma_x = \overline{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu\, \Delta \overline{u} - \left[\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right]$$

Ces équations sont appelées équations de REYNOLDS

Aux équations dynamiques, il faut ajouter l'équation de continuité soit pour un fluide incompressible :

$$\mathrm{div}\, \vec{V} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Soit en considérant les valeurs moyennes

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad \text{car} \quad \overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0$$

à chaque instant on a d'ailleurs :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

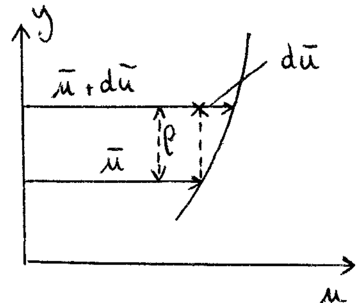
V.2.2.- DISTRIBUTION DES VITESSES

Les composantes supplémentaires du tenseur des contraintes dues à la turbulence sont de la forme $\rho \overline{u'^2}$ pour les tensions normales et $\rho \overline{u'v'}$ pour les tensions tangentielles. Ces tensions sont généralement beaucoup plus grandes que les forces de viscosité si bien qu'on peut négliger ces dernières dans les équations dynamiques.
Pour résoudre ces équations, il faut exprimer $\overline{u'}$, $\overline{v'}$ etc... à partir de certaines hypothèses. Considérons le raisonnement de PRANDTL. Soit un écoulement plan où la vitesse moyenne, parallèle à l'axe des x, ne varie qu'avec y.
PRANDT suppose que la fluctuation u' est proportionnelle à la pente $\frac{d\bar{u}}{dy}$ du profil des vitesses :

$$u' = l \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right) \qquad (26)$$

v' étant donné par une expression analogue la longueur l est appelée longueur de mélange et caractérise la turbulence.
Ainsi la tension tangentielle de turbulence est égale à :

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$



Si on compare cette formule avec la formule de NEWTON $\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ qui donne la composante visqueuse, on peut considérer que le coefficient

$$\rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (27)$$

appelé coefficient de viscosité dynamique de turbulence joue le même rôle que μ mais dépend de y contrairement à μ (en général ce coefficient est $\gg \mu$).

Par des considérations de similitide, VON KARMAN a été amené à poser :

$$l = k \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \Big/ \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \quad (28)$$

k étant une constante universelle.

Dans certains cas simples, on peut effectuer des hypothèses qui permettent de résoudre les équations. AInsi au voisinage d'une paroi solide (plaque plane, tuyau, etc...), on peut considérer que l est proportionnel à la distance y à la paroi :

$$l = Cy$$

$$\text{soit} \quad \tau_t = \rho\, C^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

Si on suppose que τ_t est constant et égal à τ_o sa valeur sur la paroi ((y=o) on a,

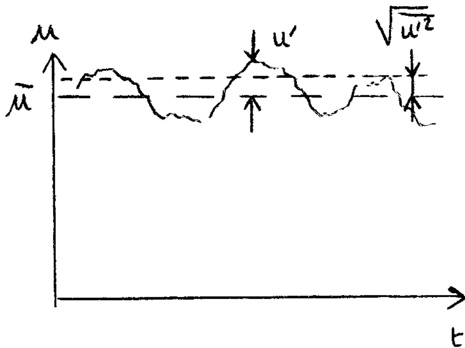
$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}\ \frac{1}{Cy}$$

$$\text{soit} \quad \bar{u} = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}\ \frac{1}{C} \operatorname{Log} y + C^{te} \quad (29)$$

Cette formule représente assez bien la répartition des vitesses moyennes observées expérimentalement (sauf au voisinage de la paroi : couche limite turbulente).

Intensité de turbulence

La Composante u de la vitesse suivant l'axe O_x varie avec le temps au tour de sa valeur moyenne $\bar{u}$.



L'importance de la turbulence est caractérisée par l'expression

$$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\overline{V}} \qquad (30)$$

qu'on appelle intensité de turbulence suivant Ox ($\overline{V}$ étant la vitesse moyenne de l'écoulement).

L'intensité globale de la turbulence sera définie par la relation :

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{\overline{V}}$$

Energie du mouvement turbulent :

A un instant donné, l'énergie mécanique totale d'un volume unité de fluide est égale à :

$$E = p + \rho gh + \rho \frac{V^2}{2}$$

Mais la pression et la vitesse subissent des fluctuations

$$p = \overline{p} + p'$$

$$V = \overline{V} + V'$$

Calculons la valeur moyenne de E : d'après la relation (19)

$$\overline{E} = \rho \frac{\overline{V}^2}{2} + \overline{p} + \rho\, gh + \rho \frac{\overline{V'^2}}{2} = \overline{E}_1 + \overline{E'} \qquad (31)$$

avec $$\overline{E'} = \rho \frac{\overline{V'^2}}{2} = \frac{\rho}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

$\overline{E_1}$ représentant l'énergie totale du mouvement moyen

$\overline{E'}$ représentant l'énergie cinétique de turbulence

Lorsque la turbulence est établie dans un écoulement, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ ne varient plus et par conséquent $\overline{E'}$: l'écoulement est alors stationnaire.

Remarque : dans un écoulement réel (laminaire ou turbulent), il y a toujours dissipation d'énergie mécanique à cause du frottement interne. Dans le cas du mouvement laminaire, cette dissipation se fait à l'échelle moléculaire entre les couches de fluide. Dans le cas de l'écoulement turbulent, en plus de ce processus moléculaire, s'ajoute un processus à une échelle plus importante : il y a échange entre particules fluides de volume plus ou moins important.
Ces particules qui passent d'une couche fluide à une autre mettent en jeu des forces bien plus importantes ; ainsi les phénomènes d'origine purement visqueuse sont masqués par les phénomènes d'origine turbulente.

V.2.3.- PROFIL DES VITESSES ET PERTES DE CHARGE

1 - Charge dans une section

Nous avons défini la charge totale h_T par l'expression :

$$h_T = h + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \qquad (32)$$

La charge totale représente, en hauteur de fluide, l'énergie mécanique totale de l'unité de poids du fluide (P = mg = 1).
L'expression $\rho\frac{V^2}{2} + p + \rho gh$ représente, en unités de pression, l'énergie mécanique totale de l'unité de volume du fluide.
Quand on considère le mouvement permanent d'un fluide parfait incompressible, le long d'une trajectoire, (il satisfait à la formule de BERNOULLI).

$$\rho\frac{V_1^2}{2} + p_1 + \rho gh_1 = \rho\frac{V_2^2}{2} + p_2 + \rho gh_2$$

ou $h_{T_1} = h_{T_2}$: la charge totale est constante le long d'une trajectoire : ceci traduit la conservation de l'énergie mécanique de la particule entre 2 positions 1 et 2. Si le fluide est visqueux, on écrira pour une particule suivant sa trajectoire : (équation IV.1 2.).

$$d(\rho\frac{V^2}{2} + p + \rho gh) = -d\tau$$

$d\tau$ étant le travail mécanique perdu par le fluide (transformé en chaleur par frottement visqueux) par unité de volume du fluide.
Intégrons cette relation entre les positions 1 et 2.

$$\rho\frac{V_1^2}{2} + p_1^* = \rho\frac{V_2^2}{2} + p_2^* + \tau \qquad (33)$$

τ = travail effectué par les forces de frottement par unité de volume (perte d'énergie mécanique).

Dans le cas de fluides liquides, on exprime la relation de BERNOUILLI en hauteur de liquide :

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1^*}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2^*}{\rho g} + \frac{\tau}{\rho g}$$

La différence $\Delta h_T = h_{T_1} - h_{T_2} = \frac{\tau}{\rho g}$ (34)

représente la perte de charge entre les deux positions (1) et (2) de la trajectoire de la particule.

On peut définir deux types de pertes de charge : - les pertes de charges régulières ou réparties : il s'agit des pertes de charges dans des conduites longues (l'écoulement étant soit laminaire (relations V 7, 8 et 9) soit turbulent).

-les pertes de charges singulières : elles sont dues à des singularités ou accidents existant dans les conduites (elles se calculent à l'aide du théorème d'Euler V: voir chapitres II et III).

Nous avons défini précédemment la perte de charge linéaire par la quantité J : (relation V.7).

$$J = \frac{h_{T_1} - h_{T_2}}{L}$$ (35) : nombre sans dimensions

et un coefficient de perte de charge linéaire Υ défini par (voir relation V.8).

$$J = \Upsilon \frac{\bar{u}^2}{2g} \frac{1}{D}$$ (36)

(Ce coefficient fait apparaître l'énergie cinétique de l'unité de poids et le diamètre D de la conduite)

2 - CALCUL DE LA PERTE DE CHARGE

a - position du problème

Si l'écoulement s'effectue dans des conduites circulaires lisses, la perte de charge entre deux sections distantes de L peut s'exprimer par la relation suivante :

$$\Delta p^* = p_1^* - p_2^* = f\ (\bar{V},\ D,\ L,\ \rho,\ \mu) \qquad (37)$$

En effet, la conduite étant cylindrique, la section est constante et la vitesse moyenne est constante .
Des considérations d'analyse dimensionnelle montrent que l'on a :

$$\Delta p^* = \rho\ \frac{\bar{V}^2}{2}\ \frac{L}{D}\ f\ \left(\frac{\bar{V}D}{\nu}\right)$$

$$\Delta p^* = \rho\ \frac{\bar{V}^2}{2}\ \frac{L}{D}\ f\ (\mathcal{R}) \qquad (38)$$

soit $$\Delta h_T = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho g} = \frac{\bar{V}^2}{2g}\ \frac{L}{D}\ f\ (\mathcal{R})$$

Le coefficient de perte de charge linéaire Ψ est égale à f $(\mathcal{R})$

$$\Psi = f\ (\mathcal{R})$$

Ce coefficient suffit pour définir la perte de charge : il ne dépend que de $\mathcal{R}$.
La détermination théorique de f$(\mathcal{R})$ est facile dans le cas de l'écoulement laminaire ($\Psi = \frac{64}{\mathcal{R}}$) mais pour un écoulement turbulent, il faut faire appel à l'expérience.

Dans l'industrie, les conduites ne sont pas lisses mais rugueuses. Il faut, par conséquent, tenir compte de cette rugosité. Aussi, la relation (37) sera remplacée par la relation suivante:

$$p_1^* - p_2^* = f\ (\overline{V},\ D,\ L,\ \rho,\ \nu,\ \text{rugosité})$$

La rugosité est une notion difficile à définir : elle peut être définie par plusieurs facteurs. On peut essayer de la caractériser par un paramètre moyen comme la hauteur moyenne ε des aspirités :

$$\text{Ainsi} \quad p_1^* - p_2^* = f\ (\overline{V},\ D,\ L,\ \rho,\ \nu,\ \varepsilon)$$

Un raisonnement analogue au précédent permet d'écrire :

$$\Delta p^* = \rho \frac{\overline{V}^2}{2} \frac{L}{D} f\ (R,\ \frac{\varepsilon}{D}) \tag{39}$$

$$\Delta h_T = \frac{\overline{V}^2}{2g} \frac{L}{D} f\ (R,\ \frac{\varepsilon}{D})$$

Le coefficient de perte de charge $\psi = f\ (R,\ \frac{\varepsilon}{D})$ est fonction du nombre de REYNOLDS et de la rugosité

Nous pourrons déterminer la relation qui existe entre le coefficient ψ et le coefficient de frottement intérieur C_f défini par la relation V.11 :

$$\tau_p = C_f \rho \frac{\overline{u}^2}{2}$$

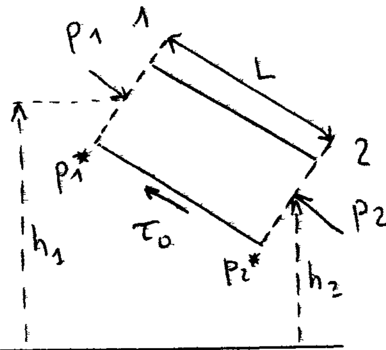
τ_p étant la force de frottement par unité d'aire sur la paroi

Considérons le fluide contenu entre 2 sections 1 et 2 et appliquons le théorème d'EULER à la surface de référence constituée par les sections 1 et 2 et les parois de la conduite.

$$\Sigma \vec{F} = \int_S \vec{V} dq \qquad dq = \text{débit de masse}$$

système forces appliquées au fluide contenu dans S

Le mouvement étant permanent, $\int \vec{V} \, dq = 0$



Par conséquent on a :

$$(p_1^* - p_2^*) \, S - \tau_p \, \pi \, D \, L = 0$$

Remarque : pour un fluide pesant, on doit considérer les p^* au lieu des pressions p pour un fluide non pesant.

Ainsi :

$$p_1^* - p_2^* = \frac{\tau_p \pi D L}{S} = C_f \, \rho \frac{\bar{u}^2}{2} \frac{\pi D L}{S}$$

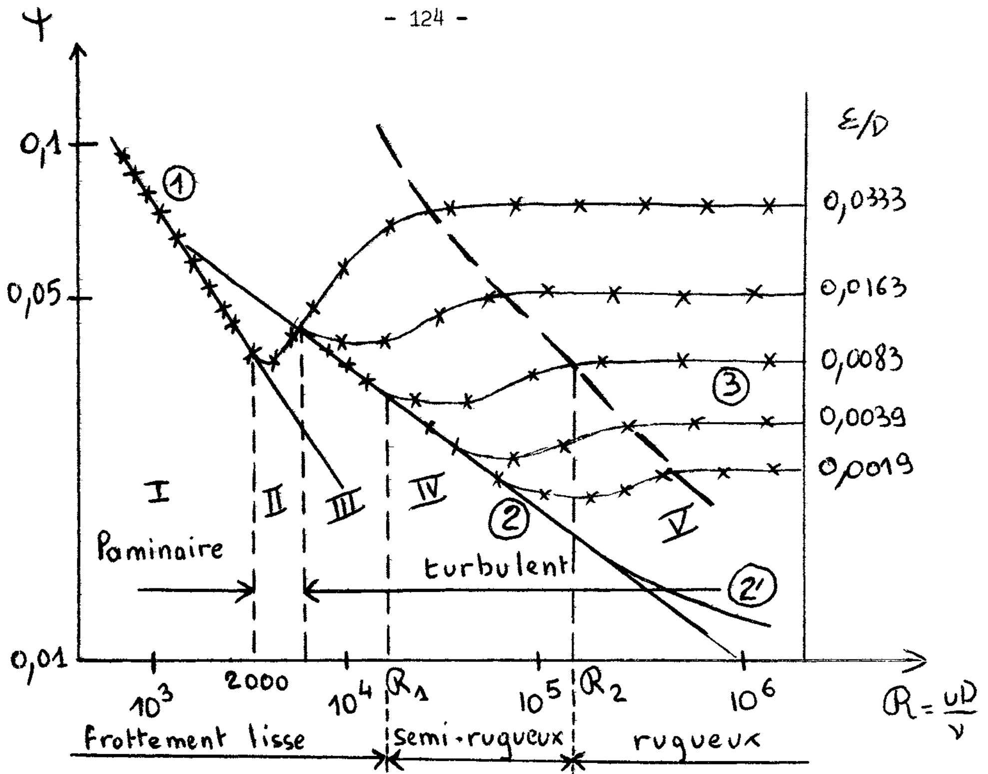
$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Soit :

$$\frac{p_1^* - p_2^*}{L} = 4 C_f \, \rho \frac{\bar{u}^2}{2} \frac{1}{D} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\psi = 4 \, C_f} \qquad (40)$$

-b- expériences de NIKURADSE

NIKURADSE a étudié les variations de ψ en fonction de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{E}$, pour des conduites avec rugosité homogène (obtenue à l'aide de grains de sable calibrés) Il a obtenu les résultats indiqués par la figure suivante :



Pour une valeur donnée de la rugosité $\varepsilon/_{D}$, les variations de ψ avec $\mathcal{R}$ peuvent être représentées par 3 portions de droite (1), (2) et (3) qui se raccordent entre elles par des zones intermédiaires. Quand $\frac{\varepsilon}{D}$ varie, la position de la droite (3) varie tout en restant horizontale.

Pour une valeur donnée de $\frac{\varepsilon}{D}$, on peut définir cinq régions :

- les régions I ; II et III ou ψ ne dépend que de $\mathcal{R}$: on dit que la conduite est hydrauliquement lisse.
- la région V : ψ ne dépend plus que $\frac{\varepsilon}{D}$: le frottement est rugueux.
- la région IV est une région de transition : le frottement y est semi-rugueux.

Dans la région I, l'écoulement est laminaire et obéit à la loi de HAGEN-POISEUILLE (1) (valable jusqu'à R ≃ 2000).

$$\psi = \frac{64}{\mathcal{R}} \tag{41}$$

La région II est une région de transition mal définie qui correspond à l'apparition de l'écoulement turbulent.
La région III correspond à la droite de BLASIUS (2)

$$\psi = \frac{0,316}{\mathcal{R}^{1/4}} = (100\,\mathcal{R})^{-1/4} \qquad (42)$$

valable jusqu'à $\mathcal{R} = 10^5$

Si $\mathcal{R}$ est $> 10^5$, les points expérimentaux se situent légèrement au-dessus de la droite de BLASIUS (courbe (2')) : on a alors la courbe de KARTMAN :

$$\psi^{-1/2} = 2 \log_{10} \frac{\mathcal{R}\,\psi^{1/2}}{2,51} \qquad (43)$$

Dans la région V, ψ est donnée par la formule de KARTMAN-PRANDTL

$$\psi^{-1/2} = 2 \log_{10} \left(3,71 \frac{D}{\varepsilon}\right) \qquad (44)$$

Ainsi le comportement d'une conduite est assez complexe : il dépend à la fois de R (en particulier du débit) et $\frac{\varepsilon}{D}$.

Cas des conduites industrielles

Dans les conduites industrielles, les aspirités ne sont pas régulières : la rugosité est hétérogène. Toutefois, les expériences de COLEBROOK ont montré qu'on pouvait généraliser les résultats obtenus dans le cas de conduites dont la rugosité est homogène. En particulier pour $\mathcal{R} < \mathcal{R}_1$ la conduite est hydrauliquement lisse alors que $\mathcal{R} > \mathcal{R}_2$ la conduite est hydrauliquement rugueuse. La relation (44) permet alors de définir une rugosité uniforme équivalente ε.
Le tableau suivant donne les valeurs de ε pour un certain nombre de parois usuelles.

Matériau	ε (mm)
tube étiré cuivre	0,001
acier neuf	0,045
acier rouillé	0,2
acier bitumé	0,015
fer galvanisé	0,15
fonte	0,25
fonte goudronnée	0,1
béton	0,3 à 3
planche en bois	0,2 à 0,9

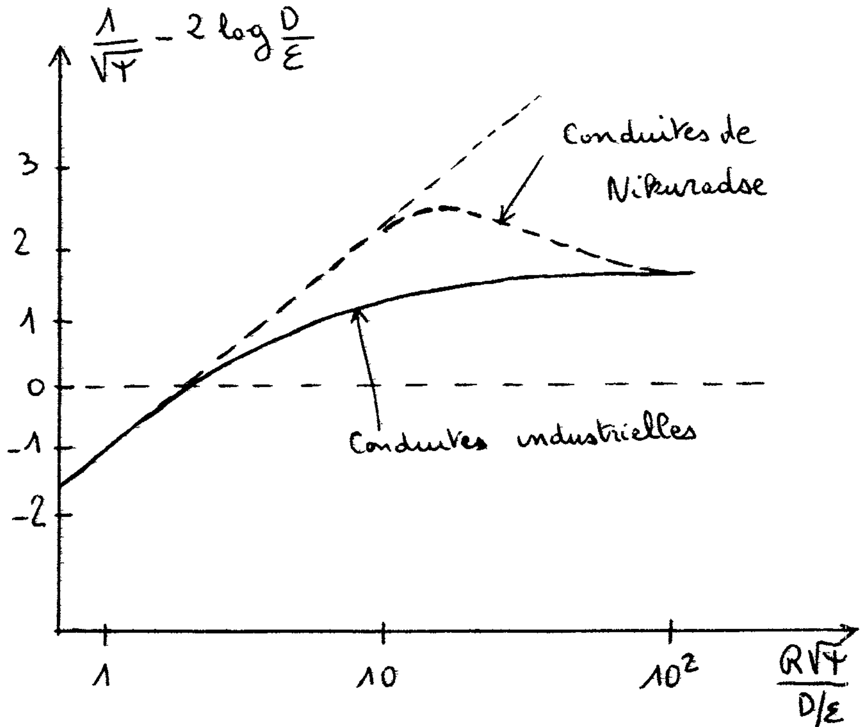
Dans la pratique, il faut tenir compte du fait que la rugosité d'une conduite varie avec le temps.
Si on porte sur un graphique $\frac{1}{\sqrt{\psi}} - 2 \log \frac{D}{\varepsilon}$ en ordonnée et $2 \log \frac{R\sqrt{\psi}}{\frac{D}{\varepsilon}}$ en abscisse, les résultats obtenus avec les conduites industrielles se situent sur une courbe unique représentée par la formule empirique de COLEBROOK

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} - 2 \log \left(\frac{D}{\varepsilon}\right) = 1,14 - 2 \log \left(1 + 9,32 \frac{D/\varepsilon}{R\sqrt{\psi}}\right) \qquad (45)$$

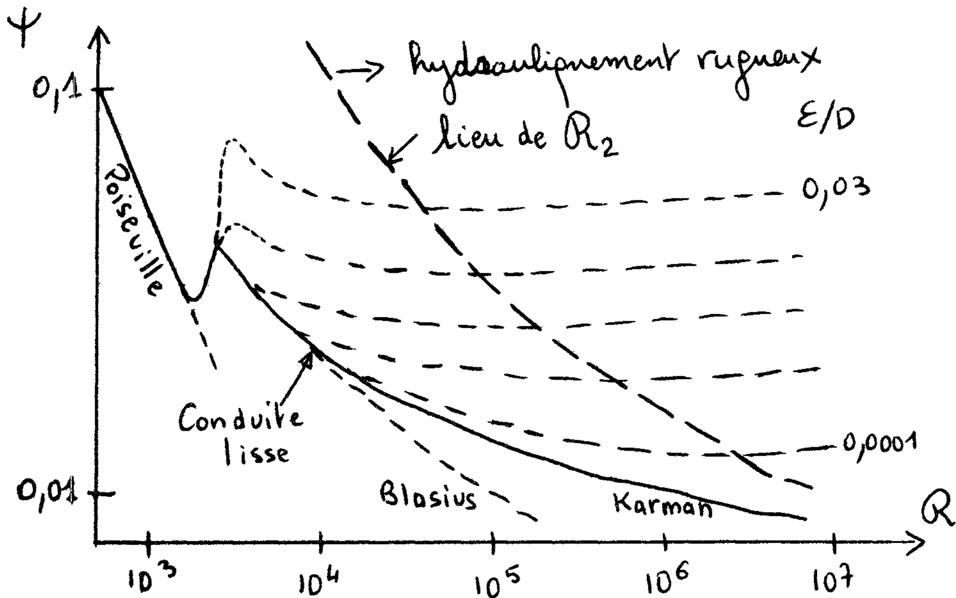
ou

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = 1,14 - 2 \log \left(\frac{\varepsilon}{D} + \frac{9,32}{R\sqrt{\psi}}\right)$$

Cette relation (45) est la formule universelle des pertes de charge dans les conduites indsutrielles



On peut constater que les conduites industrielles ont un comportement analogue à celles de NIKURADSE pour les petites et les grandes valeurs de $\frac{R\sqrt{\Psi}}{D/\varepsilon}$. Dans la pratique, le calcul de Ψ se fait à l'aide d'abaques (par exemples le diagramme de MOODY qui donne Ψ en fonction de R pour différentes valeurs de ε/D). Ce diagramme est identique à celui de NIKURADSE sauf dans les zones de transition.



3 - Profil des vitesses

Dans le cas de l'écoulement laminaire, la loi de répartition des vitesses est parabolique. Examinons maintenant le cas de l'écoulement turbulent.

La vitesse u s'exprime par une relation de la forme

$$u = f\,(\tau_p,\ D,\ \rho, \mu\ , \varepsilon\ ,\ y) \tag{46}$$

τ_p étant la force de frottement par unité de surface sur la paroi.

$$\boxed{u_f = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}} \tag{47} \qquad \tau_p = C_f \rho \frac{\bar{u}^2}{2}$$

u_f a les dimensions d'une vitesse et est appelée vitesse de frottement

Nous pouvons montrer que (conditions de similitude)

$$\frac{u}{u_f} = f\,\left(\frac{y\ u_f}{\nu},\ \frac{y}{\varepsilon}\ ,\ \frac{y}{D}\right) \tag{48}$$

<u>Conduites lisses</u> : la conduite est hydrauliquement lisse si :

$$\frac{u_f \varepsilon}{\nu} < 5 \qquad (49)$$

Le profil des vitesses peut être divisé en deux régions :

-1- région voisine de la paroi $\left(\frac{y}{r_o} \leq 0,15\right)$: la répartition des vitesses ne dépend pas de D et ε ; on a :

$$\frac{u}{u_f} = f\left(y \frac{u_f}{\nu}\right)$$

Cette région est constituée de plusieurs zones. Contre la paroi; il y a un film laminaire, de très petite épaisseur . On peut admettre que la formule de NEWTON s'applique :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \text{constante} = \tau_p$$

$$\text{soit} \quad \tau_p = \mu \frac{u}{y} \quad \frac{\tau_p}{\rho} = \nu \frac{u}{y}$$

$$\boxed{\frac{u}{u_f} = \frac{y u_f}{\nu}} \qquad (50)$$

Dans le film laminaire, la répartititition des vitesses est linéaire tant que

$$\frac{y\ u_f}{\nu} < 5$$

Si $\frac{y\ u_f}{\nu}$ est > 25, la répartition des vitesses est logarithmique :

$$\boxed{\frac{u}{u_f} = 5,65 \log \frac{y\ u_f}{\nu} + 4,9} \qquad (51)$$

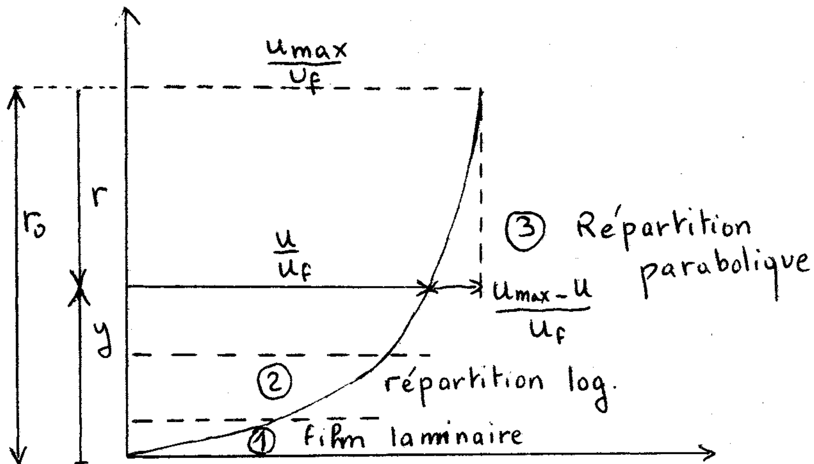
Entre les deux zones, il existe une zone de transition.

-2 - Dans la région centrale, la répartition des vitesses ne dépend pas de la nature de la paroi. L'expérience montre que :

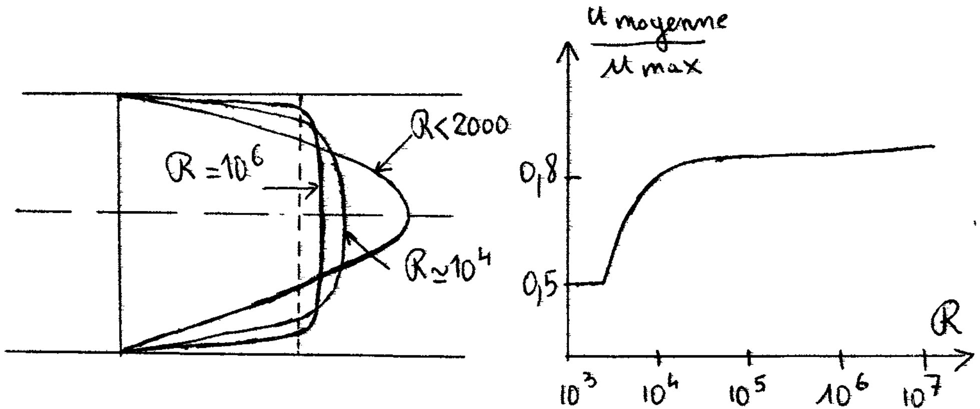
$$\frac{u_{max} - u}{u_f} = f\left(\frac{y}{D}\right)$$

Pour $\frac{y}{r_o} > 0,2$, on vérifie assez bien la loi parabolique

$$\boxed{\frac{u_{max} - u}{u_f} = 7\left(\frac{r}{r_o}\right)^2} \qquad (52)$$



Remarques : effet de la valeur $\mathcal{R}$



Conduites rugueuses

Lorsque $\frac{\varepsilon u_f}{\nu}$ est > 70, la conduite devient rugueuse et le profil des vitesses ne dépend alors que de ε (et plus de R).

L'expérience conduit à la loi de distribution des vitesses pour la région voisine de la paroi :

$$\boxed{\frac{u}{u_f} = 5{,}65 \log \frac{y}{\varepsilon} + 8{,}1} \qquad (53)$$

Si $5 < \frac{\varepsilon u_f}{\nu} < 70$, le frottement est semi-rugueux et la distribution des vitesses dépend à la fois de la viscosité (R) et de la rugosité ε :

Dans la région centrale, les mêmes lois que pour les conduites lisses sont applicables (relation 52)

